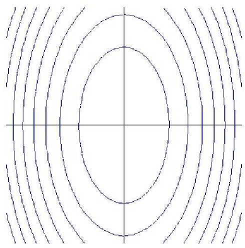
Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Jennifer Prasiswa
09.07.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11. Übung zu Analysis II

Aufgabe 49 – Richtungsableitung (Wdhlg.):

a) Gegeben folgendes Niveaulinienbild :



Gib Punkte p und Richtungen $v \neq 0$ an, für die die Richtungsableitungen verschwinden.

b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Beweise: Für jedes $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ gibt es einen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $D_v f(p) = 0$. $(n > 1)$

Aufgabe 50 – Kompaktheits-Argument:

a) Sei $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist.

b) Übertrage das Argument auf $f \in C^1(K, \mathbb{R}^m)$, wobei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist

Hausaufgabe 51 – Extrema unter Nebenbedingung:

Wir betrachten die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, $g(x) := x_1 + \ldots + x_n$ sowie das kompakte $(n-1)$-Simplex $\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 1 \text{ und } x_1, \ldots, x_n \geq 0\}$

a) Skizziere Σ in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$.

b) Überprüfe (ohne Ableiten), dass das Minimum von f auf Σ gleich Null ist.

c) Zeige, dass das Maximum von f auf Σ gleich $\frac{1}{n^n}$ ist. Suche dazu unter der Nebenbedingung $g(x) = 1$ nach lokalen Extrema x von f mit $f(x) \neq 0$.

d) Folgere aus c), dass für alle $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ gilt:

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq \frac{(x_1 + \ldots + x_n)^n}{n^n}$$

Hausaufgabe 52 – Abstand zu Rotationsfläche:

Bestimme den Abstand des Punktes $q := (4, 4, \frac{1}{2})$ vom Rotationsparaboloid

$$M := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\right\}.$$

Betrachte hierzu die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \ni p \mapsto \|p - q\|^2$ und suche nach lokalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $p \in M$.

Hausaufgabe 53 – Einschligen Hyperboloid:

Die Menge

$$M = \left\{ (x, y, z,) : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \right\} \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

nennt man *einschaliges Hyperboloid.*

a) Zeige, dass M eine 2-dimensionale Untermanigfaltigkeit des $/R^3$ ist.

b) Bestimme den Tangential- und Normalenraum an $p := (x, y, z) \in M$.

c) Betrachte nun einen *Rotationsparaboloid*, d.h. $a = b = c = 1$. Zeige, dass für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ die Gerade

$$c(t) := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

in M liegt. Man nennt dies die erzeugende Geradenschar des Rotationshyperboloids.