Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Jennifer Prasiswa
02.07.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

10. Übung zu Analysis II

Aufgabe 44 – Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$:

Skizziere grob die Mengen und begründe, welche davon 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$ sind:

$$E := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 1\big\}; \quad L := \mathbb{R} \times \{0\}; \quad G := \big\{(x, \sin(x)) : x \in (0,\pi)\big\};$$

$$R := \partial\left([0,1]^2\right); \quad D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}; \quad M := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2(1-x^2)\big\}.$$

Aufgabe 45 – Spezielle Lineare Gruppe:

Es sei $M := \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1x_4 - x_2x_3 = 1\}$.

(a) Zeige, dass M eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ ist.

[Interpretation: Nach dem Vorigen ist die sogenannte "spezielle lineare Gruppe"

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \left\{A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \det(A) = x_1x_4 - x_2x_3 = 1\right\}$$

der reellen (2×2)-Matrizen mit Determinante 1 eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit des 4-dimensionalen Vektorraums $M_2(\mathbb{R})$ der 2×2-Matrizen].

(b) Löse die Gleichung $x_1x_4 - x_2x_3 = 1$ nahe $e := (1,0,0,1)$ (entspr. der Einheitsmatrix) explizit nach x_4 auf und stelle M nahe e als Graph einer C^1-Funktion dar. Gebe eine Karte für M um e an.

Hausaufgabe 46 – Implizite Funktionen:

Die Van-der-Waalssche Gleichung

$$p = \frac{8T}{3V-1} - \frac{3}{V^2}$$

beschreibt (näherungsweise) den Druck $p > 0$ eines realen Gases, wenn eine festgelegte Teilchenzahl (ein Mol) bei einer Temperatur $T > 0$ in einem Volumen $V > \frac{1}{3}$ eingeschlossen ist. (Durch geeignete Wahl der Maßeinheiten wurden hier alle physikalischen Konstanten entfernt.)

a) Zeige, dass $(V_0, T_0, p_0) = (3, 1, \frac{2}{3})$ eine Lösung der Gleichung ist. Zeige, dass sich für (V, T, p) nahe (V_0, T_0, p_0) die Gleichung eindeutig nach V auflösen lässt.

b) Berechne $\frac{\partial V}{\partial p}(p_0, T_0)$.

Hausaufgabe 47 – Eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$:

(a) Es sei S der Kreis (Kreislinie) in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(5, 0)$ und Radius 1. Finde eine stetig differenzierbare Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$S = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : h(y, z) = 0\}.$$

Zeige, dass S eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Skizziere grob die Menge

$$M \ := \ \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h(\sqrt{x^2 + y^2},\, z) = 0\right\}.$$

Wie sieht die Menge aus? (Beschreibe sie in Worten!) Zeige, dass M eine 2–dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

Hausaufgabe 48 – Konstruktion einer Funktion:

a) Gib eine Funktion $f \in C^k(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ an, deren Nullstellenmenge $f^{-1}(0) = [0,\ 1]$ ist.

b) Finde nun $g \in C^1\,(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{R})$ mit $g^{-1}(0) = [0,\ 1] \times \{0\}$.

c) Überpüfe, dass grad $g(x, 0) = (0,\ 0)$ für alle $x \in [0,\ 1]$ filt

d) Beweise, dass grad $g(x, 0) = (0,\ 0)\ \forall x \in [0,\ 1]$ für alle Funktionen gilt, die die Bedingungen aus b) erfüllen.