Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
25.06.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

9. Übung zu Analysis II

Aufgabe 39 – Test:

In den folgenden Aussagen fehlt jeweils eine Voraussetzung. Geben Sie sie an!

a) Die Hesse-Matrix jeder Funktion ist symmetrisch.

b) Jede beschränkte abgeschlossene Menge ist (Überdeckungs-)kompakt

c) Das Bild von kompakten Mengen unter beliebigen Abbildungen ist kompakt.

d) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $a \in U$. Dann besitzt f eine lokale Umkehrfunktion in a.

e) Sei X ein metrischer Raum und $f\colon X \to X$ eine Kontraktion. Dann hat f einen Fixpunkt.

f) Jede partiell differenzierbare Abbildung ist auch differenzierbar.

g) Sei U offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $x \in U$ mit mit $\operatorname{hess} f(x)$ negativ definit. Dann hat f ein lokales Maximum in x.

h) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und x ein Punkt mit $f(x) = 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von x, so dass $\{x \in U : f(x) = 0\}$ mit dem Bild einer differenzierbaren Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ übereinstimmt.

i) Jede Folge (x_k) in einem metrischen Raum X besitzt eine konvergente Teilfolge.

Aufgabe 40 – Test:

Vervollständigen Sie folgende Tabelle:

Implizite Form	Geometrische Objekte $\subset \mathbb{R}^3$	Graphendarstellung
$\|(x,y,z)\| = 1$		$f(x,y) = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$
	Kegel	$f(x,y) = \pm\sqrt{x^2+y^2}$
$x^2 - y^2 - z^2 = 1$	zweischaliges Hyperboloid	
$x^2 + y^2 - z = 0$	Paraboloid	
	Ebene	
$x^2 + y^2 = 1$		

Hausaufgabe 41 – Quadratische Formen:

Sei $Q(x) = x^\top A x$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Finden Sie ein symmetrische Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass $x^\top \tilde{A} x = x^\top A x$.
Daher setzen wir von nun an voraus, dass A symmetrisch ist.

b) Zeigen Sie, dass Q differenzierbar ist. Berechnen Sie dazu $Q(x+h)$. Was ist dQ bzw. $\operatorname{grad} Q$? Warum ist Q stetig?

c) Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ist die Voraussetzung des Satzes für implizite Funktionen erfüllt für jede Niveaumenge von Q_A und Q_B? Was sind die Niveaumengen von Q_A und Q_B geometrisch?

Hausaufgabe 42 – Satz über implizite Funktionen (wichtig):

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + yz - 2 \\ x^2 + z^2 - y^2 - 1 \end{pmatrix}$.

(i) Zeigen Sie: $f(x,y,z) = 0$ ist in $(1,1,1)^\top$ lokal nach $(y,z)^\top$ invertierbar.

(ii) Berechnen Sie die Ableitung der durch $f(x,y,z) = 0$ implizit definierten Funktion $\gamma(x) = (y(x), z(x))^\top$.

(iii) Berechnen Sie $T^1_{(1)}\gamma$ die Taylorpolynom erstes Grades von γ in $x = 1$.

Hausaufgabe 43 – Invertierbare Matrizen:

Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^{n^2}$ mit der Standardnorm. In dieser Aufgabe betrachten wir die reellen $n \times n$-Matrizen als Elemente von $\mathbb{R}^2$. Wir benötigen die Matrizenräume

$$M(n) := \{ \text{ reelle } n \times n\text{-Matrizen } \}$$
$$\mathsf{GL}(n) := \{A \in M(n)\colon A \text{ ist invertierbar}\}.$$

(1) Zeigen Sie, die Menge $\{0\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

(2) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung surjektiv und stetig ist.

$$\det\colon \mathsf{GL}(n) \to \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\},\ A \mapsto \det(A)$$

(3) Zeigen Sie, dass $\mathsf{GL}(n;\mathbb{R})$ eine offene Menge in $M(n)$ ist. (**Hinweis:***Benutzen Sie Leibniz-Formel zur Determinantenberechnung*)

(4) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathsf{GL}(n)$ nicht wegzusammenhängend ist. Dabei heißt eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ *wegzusammenhängend*, falls es für alle Punktepaare $p, q \in U$ eine stetige Kurve $c\colon [0,1] \to U$ mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$ gibt.