Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
18.06.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

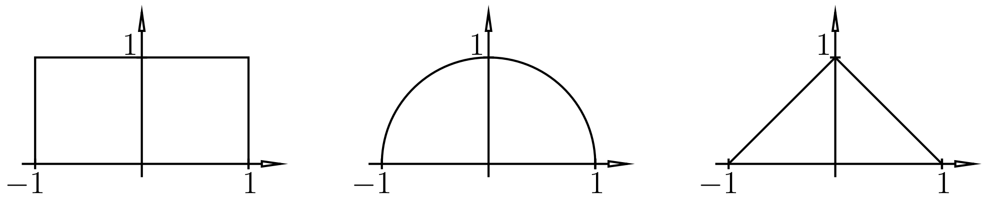
8. Übung zu Analysis II

Aufgabe 34 – Homöomorphismen und Diffeomorphismen:

Sei $f\colon (a,b) \to (0,\infty)$ eine positive Funktion. Wir betrachten die vom Graphen von f eingeschlossene Menge

$$\mathrm{R}(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a < x < b \quad \text{und} \quad 0 < y < f(x)\}.$$

a) Geben Sie Funktionen $f_\Box$, $f_\bigcirc$ und $f_\triangle$ an, welche jeweils die folgenden Gebiete einschließen:



b) Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ zwei positive Funktionen und

$$\varphi\colon\ \mathrm{R}(f) \to \mathrm{R}(g)\colon (x,y) \mapsto \left(x, \frac{g(x)}{f(x)} y\right)$$

Beschreiben Sie φ geometrisch und zeigen Sie: φ bijektiv ist.

c) Betrachten wir die durch b) gegebenen Abbildungen

$$\varphi\colon\ \mathrm{R}(f_\Box) \to \mathrm{R}(f_\bigcirc) \qquad \text{and} \qquad \psi\colon\ \mathrm{R}(f_\Box) \to \mathrm{R}(f_\triangle).$$

Welche ist Homöomorphismus, welche Diffeomorphismus?

Aufgabe 35 – Banachscher Fixpunktsatz in $\mathbb{R}$:

Sei $f\colon X \to X$ eine Abbildung eines metrischen Raums (X,d) in sich. Ein Punkt $x \in X$ heißt Fixpunkt von f wenn gilt: $f(x) = x$.
Die Abbildung f heißt Kontraktion, wenn es eine Zahl $0 < \lambda < 1$ gibt, mit der für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y)$$

Zeigen Sie:

(i) Eine stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ hat einen Fixpunkt.
Hinweis: $g(x) := f(x) - x$ und der richtige Satz über stetige Funktionen.

(ii) Ist f eine Kontraktion, so ist der Fixpunkt eindeutig.

Hausaufgabe 36 – Laplace-Operator in Polarkoordinaten:

Sei $f : U \to \mathbb{R}\,,\, U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und

$$P\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$$

die Polarkoordinaten-Abbildung.

a) Zeigen Sie für $F := f \circ P$ gilt

$$(\Delta f)(P(r,\varphi)) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} F + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} F + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} F \right)(r,\varphi)\,.$$

b) Zeigen Sie: Für $n = 2$ ist die Funktion $\log r$ harmonisch, d.h. $\Delta \log \sqrt{x^2+y^2} = 0$ $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Hausaufgabe 37 – Fixpunkte:

a) Wir betrachten den metrischen Raum $X := [1,8]$ mit $d(x,y) := |x-y|$. Zeigen Sie: Die Funktion $f\colon X \to X\colon x \mapsto \sqrt{1+x}$ hat einen eindeutig bestimmten Fixpunkt.

b) Wir betrachten den metrischen Raum $X := \mathbb{R}^2$ mit $d(x,y) := ||x-y||$. Bestimmen Sie den eindeutig bestimmten Fixpunkt folgender Funktion

$$f(x) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 38 – Lineare Regression:

Gegeben seien die Punkte $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_k,y_k) \in \mathbb{R}^2$, wobei wenigstens zwei der x_i verschieden sein sollen.

a) Bestimmen Sie zwei Zahlen $m, b \in \mathbb{R}$, sodass die quadratische Distanz

$$F(m,b) = \sum_{j=1}^{k} (mx_j + b - y_j)^2$$

zur Geraden $y = mx + b$ kritisch wird. (Typischerweise sind (x_j, y_j) Messwerte, und $F(m,b)$ ist diejenige affine Funktion, die am besten auf sie passt.)

b) (Zusatz, nicht verlangt) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von F, um zu bestätigen, dass die Funktion F in (m,b) ein Minimum annimmt. Warum ist dieses lokale Minimum sogar ein globales Minimum?