Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
11.06.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7. Übung zu Analysis II

Aufgabe 29 – Test:

1. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Welche der folgenden Funktionen sind linear?

$$\text{a) } h \mapsto D_h f(x) \qquad \text{b) } x \mapsto D_h f(x)$$
$$\text{c) } h \mapsto d_x f(h) \qquad \text{d) } h \mapsto h^\top \text{hess}_x(f) h$$

2. Sei $f : R^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Welche der folgenden Ausdrücke sind identisch?

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\Big|_{x=0} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(f(x)\big|_{x=0}) \qquad \frac{d}{dt} f(x + te_i)\Big|_{t=0} \qquad df_x(e_i)$$
$$\langle \text{grad} f(0), e_i \rangle \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_i) \qquad D_{e_i} f(0) \qquad J_f(0) e_i$$

Aufgabe 30 – Definitheit und Extrema:

1. Bestimmen Sie die Definitheit folgender Matrizen :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Gegeben sind folgende Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Überlegen Sie möglichst ohne Rechnung, ob $(0, 0)$ ein Extremum ist und welchen Typ es hat.

(i) $f(x, y) = \sin^2 x + \sin^2 y$ (ii) $f(x, y) = x^2 - y^2$
(iii) $f(x, y) = xy$ (iv) $f(x, y) = \sin x$

Hausaufgabe 31: (Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlichen)

Geben Sie grad$f$ und Hess f für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an. Bestimmen Sie die kritischen Punkte, die lokalen Extrema und die isolierten lokalen Extrema von f:

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, b) $f(x, y) = \cos x \cdot \cosh y$, c) $f(x, y) = \sin(xy)$

Hausaufgabe 32: (Eindeutigkeit des Taylorpolynoms)

a) Seien $c_0 \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Es gelte $\sum_{\ell=0}^{k} \dfrac{c_\ell}{t^\ell} \to 0$ für $t \to 0$. Zeigen Sie, dass daraus folgt: $c_0 = c_1 = \ldots = c_k = 0$ (insbesondere also $c_0 + \ldots + c_k = 0$).

b) Sei $U \in \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $r > 0$ und $B_r(x) \in U$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Beweisen Sie die Eindeutigkeit des Taylorpolynoms k-ten Grades zu f mit Entwicklungspunkt x im folgenden Sinne: Gilt

$$f(x+h) = \sum_{0 \le |I| \le k} a_I h_I + o(\|h\|^k) = \sum_{0 \le |I| \le k} \tilde{a}_I h_I + o(\|h\|^k)$$

für $h \in B_r(0)$ und gewisse $a_I, \tilde{a}_I \in \mathbb{R}$, so folgt $\sum_{0 \le |I| \le k} a_I h_I = \sum_{0 \le |I| \le k} \tilde{a}_I h_I$ für alle $h \in B_r(0)$.
(Tip: Subtrahieren Sie die Gleichungen und dividieren Sie durch $\|h\|^k$; betrachten Sie die entstehende Bedingung an th für $t \to 0$ bei festem $h \neq 0$ und benutzen Sie (a).)

c) Sei $U := B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{1-x-y}$. Zeigen Sie mit Hilfe von b), dass das Taylorpolynom k-ten Grades zu f mit Entwicklungspunkt $(0, 0)$ gegeben ist durch

$$T_k f(x, y) = 1 + x + y + (x + y)^2 + \ldots + (x + y)^k.$$

Hausaufgabe 33: (Laplace-Operator)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar. Der *Laplace-Operator* Δ ist definiert durch $\Delta f := \partial_1\partial_1 f + \ldots \partial_n\partial_n f$. Wir betrachten nun $U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und die Funktion $r : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Zeigen Sie:

a) Zeigen Sie: $\operatorname{grad} r(x) = \frac{x}{||x||}$.

b) Es gilt $\Delta(r^{2-n}) = 0$ für $n \ge 3$.

c) Im Falle $n = 2$ gilt $\Delta(\log r) = 0$.