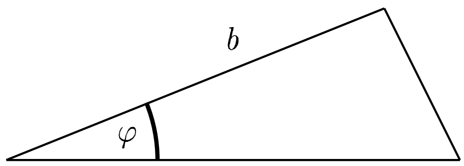
Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Jennifer Prasiswa, Yong He
04.06.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Übung zu Analysis II

Hausaufgabe 26: (Typische Anwendung der Taylor-Formel)

Das abgebildete Dreieck hat den Flächeninhalt $A(a,b,\varphi) = \frac{1}{2}\, ab \sin\varphi$.



Entwickle mit Hilfe der Taylor Formel den Inhalt $A(a+\triangle a, b+\triangle b, \varphi+\triangle\varphi)$ bis zur ersten Ordnung in den Fehlertermen $\triangle a$, $\triangle b$, sowie $\triangle\varphi$.

Hausaufgabe 27: (Differenzierbarkeit)

$$f(x,y) := \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0); \quad f(0,0) := 0.$$

a) Skizziere einige Niveaulinien von f. *Hinweis:* Betrachte $t \mapsto f(t, ct^2)$.

b) Zeige: f stetig partiell differenzierbar in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

c) f ist nicht stetig in $(0,0)$ und

d) f ist partiell differenzierbar im Punkt $(0,0)$.

e) Ist f differenzierbar im Punkt $(0,0)$?

Hausaufgabe 28: (Affensattel)

Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 3x^2y - y^3$.

a) Berechne $\operatorname{grad} f(x,y)$ und zeige $\|\operatorname{grad} f(x,y)\| = 3\|(x,y)\|^2$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Verwende Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, und bestätige die Gleichung

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^2 \sin(3\varphi) \quad \text{für alle } r, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Folgere $f \circ R = f$ wobei R die Rotation um $120° = \frac{2\pi}{3}$ sei.

c) Skizziere den Graphen der Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t\cos\varphi, t\sin\varphi) \in \mathbb{R}$ für die verschiedenen Vorzeichen von $\sin(3\varphi)$.

d) Mache eine grobe Skizze der Niveaulinien N_c, für $c < 0$ (grün), $c = 0$ (rot), und $c > 0$ (blau).

e) Erkläre den Namen *Affensattel*.