Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Jennifer Prasiswa
21.05.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

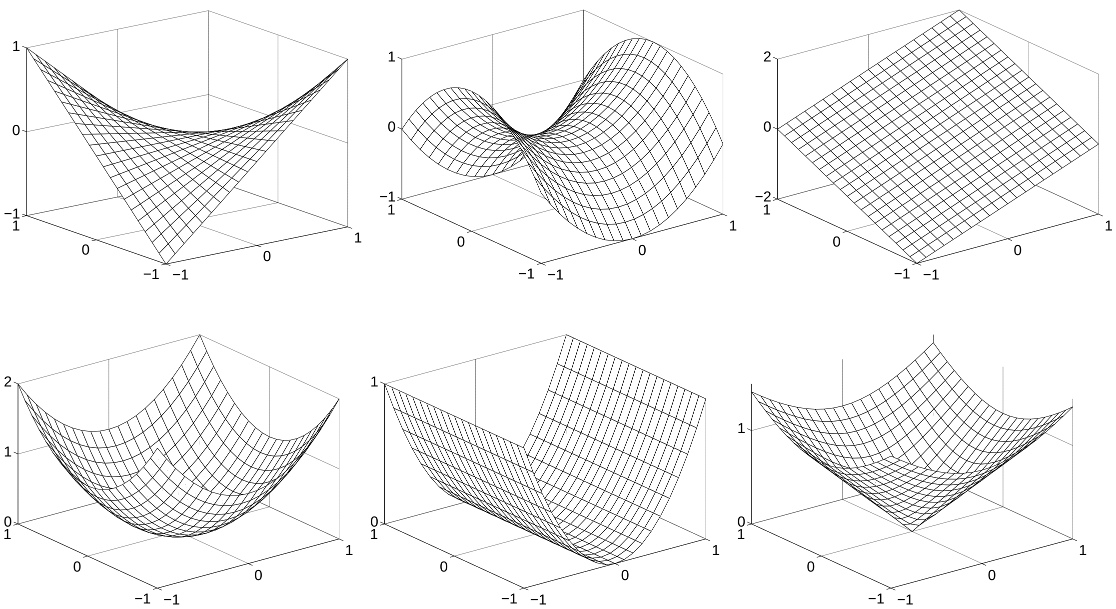
5. Übung zu Analysis II

Aufgabe 21 – Graphen, Niveaulinien:

a) Welcher Graph gehöhrt zu welcher Funktion?

$$f_1(x) = x^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x, \qquad f_2(x) = x^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x, \quad f_3(x) = x^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x,$$

$$f_4(x) = x^\top \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} x, \quad f_5(x) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \right\rangle, \qquad f_6(x) = ||x||.$$



b) Zeichne zu drei der sechs Funktionen Niveaulinien.

Aufgabe 22 – Partielle Ableitungen:

a) Bestimme den Gradienten zu folgender Funktion und berechne die Ableitung im Punkt $(1\,,1\,,1\,)$:
$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = x^2 - 3xy + 4yz - xy^2z^3$

b) Bestimme die Jacobi-Matrix von
$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (x^2+y^2, y^2+z^2)^\top$
In welchen Punkten ist ihr Rang kleiner als 2?

Hausaufgabe 23 – Eindeutigkeit der Ableitung:

a) Sei $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, $L(x) = Ax$ wobei A eine $m \times n$-Matrix ist. Zeige:

$$\lim_{x\to 0} \frac{Ax}{||x||} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = 0$$

Hinweis: Finde geeignete Folgen von gegen 0 konvergenten Vektoren.

b) Sei $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion. Zeige, dass die Ableitung von f in x eindeutig ist. Zeige hierzu: Sind $L_x, \tilde{L}_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen, und gilt für alle h mit $x + h \in U$,

$$f(x+h) = f(x) + L_x(h) + r_x(h) \qquad \text{mit} \quad \lim_{h\to 0} \frac{r_x(h)}{||h||} = 0$$

und

$$f(x+h) = f(x) + \tilde{L}_x(h) + \tilde{r}_x(h) \qquad \text{mit} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{r}_x(h)}{||h||} = 0,$$

dann muss $L_x = \tilde{L}_x$ sein.

Hausaufgabe 24 – Differenzierbarkeit:

a) Berechne die Jacobi-Matrix folgender Funktionen:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (xy, \cosh(xy), \log(1+x^2))$
2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = (x\sin(y)\cos(z), x\sin(y)\sin(z), x\cos(y))$

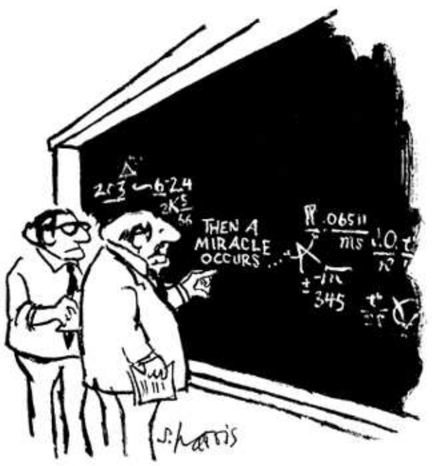
b) Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ist h auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar?

Hausaufgabe 25 – Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit:

Zeige mittels des $\epsilon - \delta-$Kriteriums, dass gilt:
Sei $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine in a differenzierbare Funktion, so ist f in a stetig.



"I think you should be more explicit here in step two."