Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Jennifer Prasiswa
14.05.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4. Übung zu Analysis II

Aufgabe 16 – Zykloide:

Der Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,\ 1)$ werde wie ein Rad auf der x-Achse entlanggerollt, so dass $m(t) := (t,\ 1)$ der Mittelpunkt zum Zeitpunkt t ist. Die Bahn $c : [0,\ 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, die der am Anfang auf $(0,\ 0)$ liegende Punkt auf dem Kreisrand dabei durchläuft, nennt man eine Zykloide.

a) Skizziere die Kurve.
b) Sei $v(t) := c(t) - m(t)$. Zeige: $v(t) = \big(\cos\big(-\frac{\pi}{2} - t\big), \sin\big(-\frac{\pi}{2} - t\big)\big)$.
c) Folgere: $c(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$
d) Berechne die Bogenlänge $L(c)$. *Tipp:* $1 - \cos(t) = 2\sin^2(\frac{t}{2})$
e) Berechne die Fläche, die von c und der x-Achse eingeschlossen wird. Betrachte dazu die Kurve als Graph einer Funktion f. Das Integral lässt sich durch Substitution $x = u(t) = t - \sin t$ berechnen.

Aufgabe 17 – Wiederholung Analysis I:

a) Sei $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $(k+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Für eine ungerade ganze Zahl $k \geq 1$ sei $f'(0) = f^{(1)}(0) = \cdots = f^{(k)}(0) = 0$ und $f^{(k+1)}(0) < 0$. Benutze die Taylor-Formel, um zu zeigen, dass f ein lokales Maximum bei 0 hat.
b) Sei f zweimal stetig differenzierbar mit $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$ und $f''(x) > 0, \forall x$. Zeige, dass f streng monoton steigend ist.
Hinweise: Benutze den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Hausaufgabe 18 – Astroide:

Sei B die Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,\ 0)$. Der Kreis mit Radius $\frac{1}{4}$ und Mittelpunkt $(\frac{3}{4},\ 0)$ werde (in B) wie ein Rad auf dem (inneren) Rand von B entlanggerollt, so dass $m(t) := \frac{3}{4}(\cos t,\ \sin t)$ der Mittelpunkt zum Zeitpunkt t ist. Die Bahn $c : [0,\ 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, die der am Anfang auf $(1,\ 0)$ liegende Punkt dabei durchläuft, ist eine Astroide.

a) Skizziere die Kurve.
b) Sei $v(t) := c(t) - m(t)$. Zeige: $v(t) = \frac{1}{4}\left(\cos(t - 4t), \sin(t - 4t)\right)$.
c) Gib Formeln für $\cos^3(t), \sin^3(t)$ an. *Tipp:* Berechne $\left(e^{it}\right)^3$
d) Folgere: $c(t) = \big(\cos^3 t,\ \sin^3 t\big)$
e) Für welche $t \in [0,\ 2\pi]$ gilt $c'(t) = 0$?

Hausaufgabe 19 – Abstand von einer Menge:

Sei $(X,\ d)$ ein metrischer Raum. Für eine nichtleere Teilmenge $A \subset X$ sei

$$d(x,\ A) := \inf_{y \in A} d(x,\ y),\ x \in X$$

der Abstand des Punktes x zur Menge A.
Weiter sei für eine nichtleere Menge $B \subset X$ sei

$$d(B,\ A) := \inf_{x \in B} d(x,\ A),$$

der Abstand der Mengen A und B.

a) Zeige, dass die Abbildung $x \mapsto d(x, A)$ von X nach $\mathbb{R}$ stetig ist.

b) Seien $A, B \subset X$ und nicht leer. Weiterhin gelte $A \cap \overline{B} = \emptyset$ und $B \cap \overline{A} = \emptyset$. Zeige: Es existieren offene Mengen $U,\ V \in X$ mit $A \subset U,\ B \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$.
Hinweis: Erinnere dich an die in Aufgabe 15 bewiesen Aussage: $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$

c) Sei B kompakt und $B \cap \overline{A} = \emptyset$. Zeige, $d(B,\ A) > 0$

Hausaufgabe 20 – Parametrisierung nach Bogenlänge:

Sei $c:\ [a,\ b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve mit Länge $L := L(c)$. Es gelte $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,\ b]$.
Behauptung: Es gibt eine bijektive, differenzierbare Funktion $\varphi:\ [0,\ L] \to [a,\ b]$, so dass für die umparamerisierte Kurve $\tilde{c} := c \circ \varphi:\ [0,\ L] \to \mathbb{R}^n$ gilt: $|\tilde{c}'| = 1$. Man sagt $\tilde{c}$ ist nach Bogenlänge parametrisiert.

a) Begründe zuerst, warum $l:\ [a,\ b] \to [0,\ L],\ \ l(t) := \int_a^t |c'(s)| ds$ umkehrbar ist.

b) Beweise nun mit Hilfe der Umkehrfunktion von l die Behauptung.