Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Jennifer Prasiswa
07.05.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

# 3. Übung zu Analysis II

**Aufgabe 11 – Cantor-Menge (Teil 1):**

Sei $C_0 = [0,\ 1]$. Wir erhalten $C_1$ aus $C_0$, indem wir das mittlere Drittel $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ entfernen. Entsprechend gehen wir induktiv vor: $C_n$ ist eine Vereinigung geschlossener Intervalle und $C_{n+1}$ entsteht durch Entfernen der (offenen) mittleren Drittel all dieser Intervalle. Die Cantor-Menge sei nun:

$$C^\star := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

a) Skizziere $C_0$, $C_1$, $C_2$, $C_3$. Aus wievielen Intervallen besteht $C_n$? Welche Länge haben diese?

b) Eine Menge $M \in \mathbb{R}$ ist heißt *Nullmenge*, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein Überdeckung aus endlich vielen Intervallen $I_1, \ldots, I_N$ besteht, so dass $\sum_{i=1}^{N} |I_i| < \epsilon$.
Zeige, dass $C^\star$ eine Nullmenge ist.

c) Zeige, dass $C^\star$ abgeschlossen ist.

**Aufgabe 12 – Rand, Abschluss, Innneres (Teil 1):**

Wir betrachten einen metrischen Raum $X$ (z.B. $\mathbb{R}^n$). Das *Innere* $\mathring{A}$ einer Menge $A$ ist die Menge aller Punkte $p \in A$, für die es eine offene $\epsilon$-Kugel $B_\epsilon(p) = \{x \in X : d(p,x) < \epsilon\}$ gibt, welche ganz in $A$ liegt (d.h. $\mathring{A}$ ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von $A$). Der *Abschluss* $\overline{A}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, welche $A$ enthalten. Der *Rand* $\partial A$ von $A$ ist die Menge $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.

a) Skizziere für die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ jeweils das Innere $\mathring{A}$, den Abschluss $\overline{A}$ sowie den Rand $\partial A$:

1. $A = B_1(0)$
2. $A = (-1, 2] \times [1, 3)$
3. $A = \{(x, 0) \mid x \neq 0\}$
4. $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{Q}\}$
5. $A = \mathbb{Q}^2$

b) Beweise die folgenden Inklusionen:

1. $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$
2. $\mathring{A} \cap \partial A = \emptyset$
3. $A \cup \partial A = \overline{A}$

## Hausaufgabe 13 – Cantor-Menge (Teil 2):

Ziel ist es zu zeigen, dass die in Aufgabe 11 definierte Cantor Menge auch folgendermaßen beschrieben werden kann:

$$\left\{x \in \mathbb{R}\colon \text{ es existiert eine Folge } (a_n) \in \{0,\, 2\}^{\mathbb{N}} \text{ mit } x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{3^n}\right\} =: C$$

a) Bestimme sämtliche (!) triadischen Darstellungen folgender Zahlen:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{7}{9}$$

b) Sei $U_1^0 = \left(\frac{1}{3},\, \frac{2}{3}\right)$. Was kann man über die triadischen Darstellungen aller $x \in U_1^0$ sagen?

c) Seien $U_1^n, \ldots, U_{2^n}^n$ die offenen Intervalle, die aus $C_n$ entfernt wurden, um $C_{n+1}$ zu erhalten. Wie kann man triadische Darstellungen aller $x \in U_1^n \cup \cdots \cup U_{2^n}^n$ beschreiben?

d) Folgere $C = C^\star$.
*Hinweis:* Betrachte $\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} U_k^n$.

## Hausaufgabe 14 – Funktionenraum:

Betrachte den Funktionenraum $C\left([0,1]\right)$, d.h. den Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ zusammen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup\left\{|f(x)| \colon x \in [0,1]\right\}$.

a) Zeige, dass die Menge $M := \left\{f \in C\left([0,1]\right) :\ \int_0^1 |f(x)|\, dx = 1\right\}$ nicht beschränkt ist. Warum reicht dies, um zu zeigen, dass sie nicht kompakt ist?

b) Zeige, dass der abgeschlossene Einheitsball nicht kompakt ist. *Hinweis:* Aufgabe 9

## Hausaufgabe 15 – Rand, Abschluss, Innneres (Teil 2):

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $A, B \subset X$.

a) Beweise die folgenden Behauptungen.

1) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B},\ \mathring{A} \subset \mathring{B}$;
2) $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$;
3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

b) Beweise, dass für jedes $x \in X$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1) $x \in \overline{A}$;
2) es existiert eine Folge $(x_n)$ in $A$, welche gegen $x$ konvergiert;
3) $d(x, A) = 0$, mit $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \colon a \in A\}$.