Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Jennifer Prasiswa
30.04.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Übung zu Analysis II

Aufgabe 6 – offen, abgeschlossen, kompakt:

Entscheide welche der folgenden Aussagen im $\mathbb{R}^n$ wahr sind und liefere gegebenenfalls Gegenbeispiele.

a) Abgeschlossene Mengen sind beschränkt.
b) Kompakte Mengen sind abgeschlossen.
c) Offene Mengen sind beschränkt.
d) Beschränkte Mengen sind kompakt.
e) Abgeschlossene Mengen sind nicht offen.
f) Kompakte Mengen sind abgeschlossen und beschränkt.
g) Eine Menge ist entweder offen oder abgeschlossen.

Aufgabe 7 – Mengen in endlich dimensionalen Vektorräumen:

Entscheide und begründe, ob folgende Menge offen, abgeschlossen, kompakt sind.

a) $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$
b) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \left\{ \frac{1}{n} \colon \ \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \right\}$ in $\mathbb{R}$
c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$
e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$
f) $\{z \in \mathbb{C}\colon\ z \neq 0,\ |z| < 1\}$ (Punktierte Kreisscheibe)
g) $\{k + l,\ k \in K,\ l \in L,\ K \text{ und } L \text{ kompakt}\}$ in $\mathbb{C}^n$
h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ mit $f(x, y) = \begin{cases} y & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$

Hausaufgabe 8 – Kompakta im $\mathbb{R}^n$:

a) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakte Teilmengen. Zeige, daß $A \cup B$ ebenfalls kompakt ist.
b) Seien A_k, $k \in \mathbb{N}$ kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ebenfalls kompakt.
c) Gib ein Beispiel an, in dem die Vereinigung von unendlich vielen kompakten Mengen A_k mit $k \in \mathbb{N}$ nicht kompakt ist.

Hausaufgabe 9 – Folgenraum:

Sei

$$l^2 := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2 < \infty \right\}$$

der Raum der quadratintegrierbaren Folgen.

a) Zeige, dass l^2 ein Vektorraum ist.

b) Zeige, dass $\langle (a_n), (b_n) \rangle := \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i b_i$ für $(a_n), (b_n) \in l^2$ ein Skalarprodukt definiert.

c) Zeige, das $\|(a_n)\| := \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2}$ eine Norm auf l^2 definiert.

d) Ein System $\{(e_n^i) \in l^2 \colon i \in I\}$ heißt Orthonormalbasis, wenn $\langle (e_n^i), (e_n^j) \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ und jedes $(a_n) \in l^2$, als eine unendliche Linearkombination der $(e_n^i)_{i\in I}$ darzustellen ist.
Geben sie eine Orthonormalbasis von l^2 an. Berechne den paarweisen Abstand der Basisvektoren $\|(e_n^i) - (e_n^j)\|$, $i, j \in I$.

e) Folgern Sie, dass $B_1(0) = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < 1 \right\}$ nicht kompakt ist, d.h. nicht die Heine-Borel-Überdeckungseigenschaft erfüllt.
Korrektur: es geht um die abgeschlossene Einheitskugel also $\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 \leq 1 \right\}$
Zusatzfrage: Überträgt sich diese Eigenschaft auf jeden nicht endlichdimensionalen Vektorraum mit Skalarprodukt?

Bemerkung: l^2 ist vollständig.

Hausaufgabe 10 – Kompakter metrischer Raum:

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, d.h. er besitzt die Überdeckungseigenschaft. Zu jeder Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X, existiert ein $\lambda > 0$, so dass jede Teilmenge $A \subset X$ mit $diam(A) < \lambda$ in einem U_i liegt.
$diam(M)$ bezeichnet den Durchmesser der Menge M:

$$diam(M) = \sup \{ d(p, q) \colon p, q \in M \}.$$

Hinweis: Überlege Dir, dass um jedes $x \in X$ eine offene Kugel $B_{r_x}(x)$ existiert, die in einer Menge U_{i_x} der Überdeckung liegt. Betrachte dann die Überdeckung $\left(B_{r_x/2}(x)\right)_{x\in X}$ von X.