Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Jennifer Prasiswa
23.04.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Übung zu Analysis II

Aufgabe 1 – Metriken auf $\mathbb{R}^n$:

Sei $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine konkave Funktion mit $f(0) = 0$.
Dabei heißt f *konkav* falls $f(\sigma s + (1-\sigma)t) \geq \sigma f(s) + (1-\sigma) f(t)$ für alle $s, t \in [0, \infty)$ und $0 \leq \sigma \leq 1$ gilt. Ist f zweifach differenzierbar, so ist f genau dann *konkav* wenn $f'' \leq 0$.

a) Zeige, dass für alle $a, b \geq 0$ gilt $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$.
b) Sei zusätzlich $f(t) > 0$ für $t > 0$. Zeige, dass f monoton steigend ist.
c) $f(t) > 0$ für $t > 0$ gelte weiterhin. Zeige mit Hilfe von a) und b), dass $(\mathbb{R}, d)$ mit $d(x, y) := f(|x-y|)$ ein metrischer Raum ist.
d) Wird durch $d_1(x, y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert ?

Aufgabe 2 – Schnitte offener Mengen:

Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ sei $B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < r\}$

a) Bestimme für $x \in B_r(a)$ einen Radius $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset B_r(a)$.
b) Zeige, dass der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen offen ist.
c) Finde ein Beispiel dafür, dass der Durchschnitt unendlich vieler offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ nicht offen zu sein braucht.

Hausaufgabe 3 – Norm auf $\mathbb{R}^n$:

a) Betrachte die *Einheitsbälle* $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p < 1\}$ für $p = 1, 2, \infty$. Skizziere sie für $n = 2$. Beschreibe sie für $n = 3$.
b) Zeige allgemein, daß jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ durch $c \cdot \| \|_1$ beschränkt ist für ein geeignetes $c \in (0, \infty)$ (wobei $\| \|_1$ die durch $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ beschriebene Norm bezeichnet). *Hinweis:* Verwende die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$.

Hausaufgabe 4 – Französische Eisenbahnmetrik:

Betrachte $\mathbb{R}^2$ zusammen mit folgender, oft als *französische Eisenbahnmetrik*, bezeichneten Metrik

$$d_{SNCF}(x, y) := \begin{cases} |x-y| & \text{falls } x = \lambda y \text{ für ein } \lambda > 0 \\ |x| + |y| & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige, dass $(\mathbb{R}^2, d_{SNCF})$ tatsächlich ein metrischer Raum ist.
b) Erkläre die Namensgebung? Wo liegt Paris?
c) Skizziere $B_R(x)$ für $x \neq 0$. Welche beiden Fälle sind dabei zu unterscheiden?

Hausaufgabe 5 – Struktur von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$:

Sei M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, daß M eine abzählbare disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen ist. (Eine *disjunkte* Vereinigung $\bigcup_{i \in I} X_i$ ist eine Vereinigung bei der je zwei Mengen X_i und X_k mit $i \neq k \in I$ leeren Schnitt haben.)
Dazu gehen wir in folgenden Schritten vor:

a) Sei $x \in M$. Mit I_x bezeichnen wir die Vereinigung aller offenen Intervalle, die x enthalten, und die in M enthalten sind. Zeige, daß I_x ein offenes Intervall ist.

b) Seien $x, y \in M$. Zeige, daß aus $y \in I_x$ schon $I_x = I_y$ folgt.

c) (*Wiederholung*:) Was bedeutet $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$. Zeige nun die Behauptung.