Mathematik II für MB, WI/MB und andere

Prof. Dr. Wilhelm Stannat

Inhalt:

Das vorliegende Skript ist eine Zusammenfassung der ersten drei Kapitel der Vorlesung Mathematik II für MB, WI/MB und andere, die im SS 2007 an der TU Darmstadt gehalten wurde.

Korrekturen bitte per Email an `stannat@mathematik.tu-darmstadt.de`

Mengen von Zahlen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N}\right\}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R} =$ Menge aller Dezimalbrüche	reelle Zahlen
$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$	Menge der komplexen Zahlen
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	offenes Intervall
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	halboffenes Intervall
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	halboffenes Intervall
$\mathbb{R}^n = \{X = [x_1, \dots, x_n]^T : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$	n-dimensionaler Punktraum

1 Folgen und Reihen von Funktionen

1.1 Allgemeines

Wir wollen im folgenden einige allgemeine Eigenschaften von Funktionenreihen zusammenfassen. Als Beispiele dienen uns dabei die in in Mathematik I eingeführten Potenzreihen und Taylorreihen.

Im ganzen Abschnitt sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Eine **Funktionenfolge (auf I)** $(f_n)_{n\geq n_0}$ ist eine Abbildung $n \mapsto f_n$, die jeder ganzen Zahl n $(n \geq n_0)$ eine Funktion $f_n : I \to \mathbb{R}$ zuordnet.
Ist $(f_n)_{n\geq n_0}$ eine Funktionenfolge, so heißt die Folge $(s_n)_{n\geq n_0}$ der Partialsummen

$$s_n(x) = \sum_{k=n_0}^{n} f_k(x), \quad x \in I$$

eine **Funktionenreihe (auf I)** und wir schreiben hierfür auch $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k$.

Punktweise Konvergenz

Für alle $x \in I$ erhält man aus einer Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq n_0}$ eine Folge reeller Zahlen $(f_n(x))_{n\geq n_0}$. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq n_0}$ heißt **punktweise konvergent mit Grenzfunktion** f, wenn für alle $x \in I$ die Folge der Funktionswerte $(f_n(x))_{n\geq n_0}$ gegen $f(x)$ konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in I$$

Analog für Funktionenreihen: Die Funktionenreihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k$ heißt **punktweise konvergent mit Summenfunktion** s, falls die Funktionenfolge der Partialsummen punktweise gegen s konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0}^{n} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) \qquad \forall x \in I$$

Beispiele 1.1

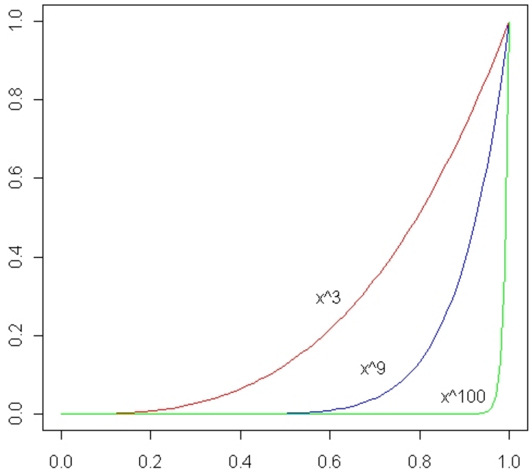
(i) $f_n = x^n$ auf $I = [0,1]$ ist konvergent gegen $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1[\\ 1 & \text{für } x = 1\,. \end{cases}$

(ii) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ auf $I = [0,1]$ ist konvergent gegen $f(x) = 0$, denn für $x \neq 0$ gilt

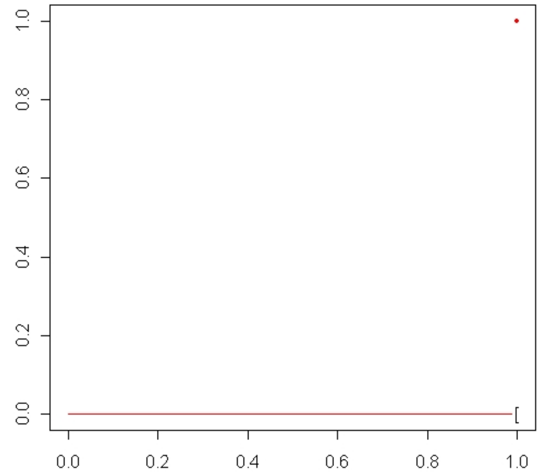
$$f_n(x) = \frac{1}{x} \underbrace{(nx^2)e^{-nx^2}}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty}\,.$$

(iii) $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(\pi n x)$ auf $I = [0,1]$ konvergiert gegen $f(x) = 0$.

Beispiel (i) zeigt: Grenzfunktionen stetiger Funktionen müssen nicht wieder stetig sein



Funktionenfolge x^n



Grenzfunktion

Beispiel (ii) zeigt: Integration darf im allgemeinen mit dem Funktionsgrenzwert nicht vertauscht werden

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 nxe^{-nx^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-nx^2}\,|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

aber $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Beispiel (iii) zeigt: Differentiation darf im allgemeinen mit dem Funktionsgrenzwert nicht vertauscht werden

$$f_n'(x) = \pi\sqrt{n}\cos(\pi n x) \quad \text{also } f_n'(0) = \pi\sqrt{n} \quad \text{aber } f'(x) = 0\,.$$

Um Differentiation und Integration mit Funktionsgrenzwerten vertauschen zu können, benötigen wir den stärkeren Konvergenzbegriff der **gleichmäßigen Konvergenz**.

Definition Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq n_0}$ (auf I) heißt **gleichmäßig konvergent** gegen die Grenzfunktion f, falls es eine Nullfolge $(a_n)_{n\geq n_0}$ gibt mit

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \qquad \text{für alle } x \in I, n \geq n_0$$

Entsprechend heißt die Funktionenreihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent, falls die Funktionenfolge der Partialsummen gleichmäßig konvergiert.

Damit gilt nun

$$(f_n)_{n\geq n_0} \text{ gleichmäßig konvergent} \Rightarrow (f_n)_{n\geq n_0} \text{ punktweise konvergent}$$

Die Umkehrung gilt aber nicht, wie folgendes Beispiel zeigt

Beispiel (siehe Beispiel 1.1 (i))
$f_n(x) = x^n$ ist punktweise konvergent auf $[0,1]$ gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1[\\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

aber nicht gleichmäßig, denn

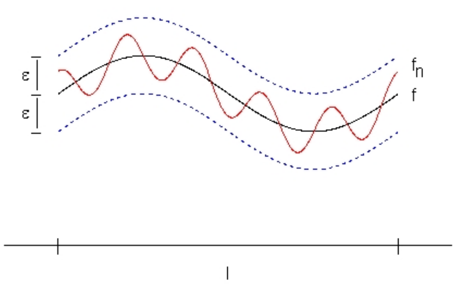
$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n & \text{für } x \in [0,1[\\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

und speziell für $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ gilt

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$$

Daher kann es keine Nullfolge (a_n) mit $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ für alle $x \in [0,1]$, wie in der Definition für gleichmäßige Konvergenz gefordert, geben.

Graphische Veranschaulichung gleichmäßiger Kovergenz



$(f_n)_{n\geq n_0}$ ist genau dann gleichmäßig konvergent gegen f, wenn zu $\varepsilon > 0$ ein N_ε existiert mit der Eigenschaft, dass alle Funktionen f_n für $n \geq N_\varepsilon$ ganz im ε-Schlauch um f liegen.

Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen

Es sei $(f_n)_{n\geq n_0}$ eine punktweise konvergente Funktionenfolge (auf $I = [a,b]$) mit Grenzfunktion f. Dann gilt

(i) (f_n) gleichmäßig konvergent, f_n stetig für alle n $\Rightarrow$ f stetig

(ii) (f_n) gleichmäßig konvergent, f_n integrierbar für alle n $\Rightarrow$ f integrierbar

und $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

(iii) (f_n) stetig differenzierbar, (f_n') gleichmäßig konvergent $\Rightarrow$ f stetig differenzierbar, $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ und (f_n) gleichmäßig konvergent.

Entsprechende Aussagen gelten für Funktionenreihen, wenn man obige Aussagen auf die Funktionenfolgen der Partialsummen anwendet. Insbesondere gilt also für eine punktweise konvergente Funktionenreihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k$

- $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent, f_n integrierbar für alle n
$$\Rightarrow \qquad \int_a^b \sum_{k=n_0}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=n_0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$
- (f_n) stetig differenzierbar, $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k'$ gleichmäßig konvergent
$$\Rightarrow \qquad \left(\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=n_0}^{\infty} f_k'(x)$$

Beispiele

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ist gleichmäßig konvergent auf $[0,b]$ für alle $b<1$ mit Grenzfunktion $\frac{1}{1-x}$, denn
$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \text{also}$$
$$\left| s_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{x^{n+1}}{1-x} \le \underbrace{\frac{b^{n+1}}{1-b}}_{=:a_n} \stackrel{n\to\infty}{\to} 0$$

Insbesondere folgt
$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^b x^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} b^{k+1} = \int_0^b \frac{1}{1-x} \, dx = -\ln(1-b)$$

oder **äquivalent**
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-b)^{k+1}}{k+1} = \ln(1-b) \ \text{ für } \ 0<b<1$$

Dies entspricht gerade der in Kapitel 10, Mathematik I, aufgeführten Potenzreihendarstellung von $\ln(1+x)$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \ |x|<1$$

Die Funktionenreihe der Ableitungen $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$ ist ebenfalls gleichmäßig konvergent auf $[0,b]$ für $b<1$ und damit folgt
$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \ \text{ für alle } x \in [0,b]\,.$$

Dabei ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$ auf $[0,b]$, $b<1$, aus den allgemeinen Sätzen zum Konvergenzbereich von Potenzreihen (siehe Kapitel 10, Mathematik I und Ergänzung hierzu am Ende dieses Abschnittes). In diesem Spezialfall kann man die gleichmäßige Konvergenz jedoch auch wie folgt direkt einsehen
$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} - \underbrace{(n+1)\frac{x^n}{1-x}}_{\to 0 \text{ glm. auf } [0,b]}$$

Für Funktionenreihen gilt folgendes **einfaches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz**

Gibt es eine Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ mit

$$|f_k(x)| \leq a_k \quad \text{für alle } x \in I, k \geq n_0$$

und ist die Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist die Funktionenreihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent (auf I).

Beispiel Die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, denn

$$\left|\frac{\cos(kx)}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$$

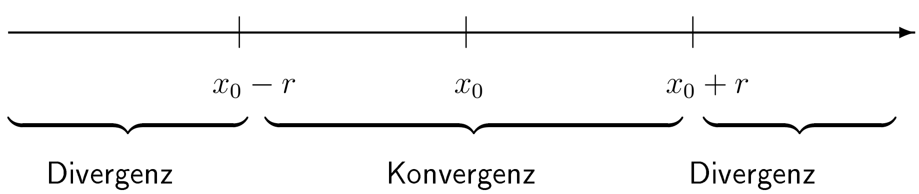
und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent.

Potenzreihen

Als Beispiele für Funktionenreihen hatten wir bereits in Kapitel 10, Mathematik I, Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \tag{1.1}$$

kennengelernt. Der Konvergenzbereich von (1.1) hat die Form



für ein $r \geq 0$ (auch $r = +\infty$). Für den Konvergenzradius r gilt dabei die Formel

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{1.2}$$

Hinweis Ist $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_n$ keine konvergente Folge, so muss man in der Formel (1.2) "$\lim_{n\to\infty}$" durch "$\limsup_{n\to\infty}$" ("limes superior" ersetzen).

Einschub: limes superior/limes inferior

Es sei $(b_n)_{n\geq n_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Unter dem $\limsup_{n\to\infty} b_n$ der Folge $(b_n)_{n\geq n_0}$ versteht man den **größten** Wert b (auch $b = +\infty$) für den es eine **Teilfolge**

$$b_{n_1}, b_{n_2}, b_{n_3}, \ldots (n_0 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \ldots)$$

der ursprünglichen Folge $(b_n)_{n\geq n_0}$ gibt, die gegen b konvergiert

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = b\,.$$

Entsprechend definiert man $\liminf_{n\to\infty} b_n$ als den **kleinsten** Wert b (auch $b = -\infty$) gegen den eine **Teilfolge** $(b_{n_k})_{k\geq 1}$ der ursprünglichen Folge $(b_n)_{n\geq n_0}$ konvergiert.

Beispiel Für $b_n = (-1)^n$, $n \geq 0$, gilt

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = +1\,, \quad \liminf_{n\to\infty} b_n = -1\,.$$

Man bezeichnet $\limsup_{n\to\infty} b_n$ auch als **größten Häufungspunkt** der Folge $(b_n)_{n\geq n_0}$, denn in jeder ε-Umgebung von $\limsup_{n\to\infty} b_n$ liegen unendlich viele Folgenglieder der Folge, aber oberhalb dieser Umgebung liegen jeweils nur endlich viele Folgenglieder. Der $\limsup_{n\to\infty} b_n$ ist also der größte Wert, um den sich die Folgenglieder der Folge $(b_n)_{n\geq n_0}$ häufen. Entsprechend bezeichnet man $\liminf_{n\to\infty} b_n$ auch als **kleinsten Häufungspunkt** der Folge $(b_n)_{n\geq n_0}$.

Zurück zu Potenzreihen: Alternativ gilt für den Konvergenzradius die einfachere Formel

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

falls der Grenzwert existiert.

(i) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$ hat Konvergenzradius $r = \infty$, denn

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \left|\frac{(k+1)!}{k!}\right| = k+1 \to \infty\,.$$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} k2^k(x-2)^k$ hat Konvergenzradius $r = \frac{1}{2}$, denn

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \left|\frac{k2^k}{(k+1)2^{k+1}}\right| = \frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}\,.$$

(iii) Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ mit

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{1}{k} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

hat Konvergenzradius 1, aber

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \quad \text{existiert nicht.}$$

Innerhalb ihres Konvergenzbereiches, d.h. für x mit $|x - x_0| < r$, ist die Potenzreihe (1.1) **gleichmäßig konvergent**. Die durch die Potenzreihe (1.1) dargestellte Funktion

$$f :]x_0 - r, x_0 + r[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

ist also stetig differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

und integrierbar mit Stammfunktion

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} .$$

Anwendungsbeispiel Die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ ist in der Fehlerrechnung von großer Bedeutung, besitzt aber keine elementare Stammfunktion. Daher sind die Integrale

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, dt$$

nicht elementar zu berechnen. f besitzt jedoch die Potenzreihendarstellung

$$e^{-x^2} \underbrace{=}_{y=-x^2} e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-x^2)^k}{k!}}_{=(-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} .$$

Für die Stammfunktion $\Phi(x)$ ergibt sich die Reihendarstellung

$$\Phi(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!} \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!} .$$

Also

$$\Phi(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

und für den Fehler gilt die Abschätzung

$$\left| \Phi(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} e^{x^2} .$$

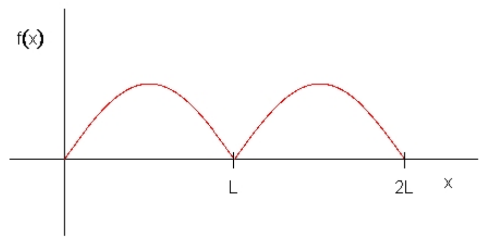
1.2 Fourierreihen

Eine besonders wichtige Klasse von Funktionenreihen bilden die Fourierreihen. Sie eignen sich insbesondere zur Behandlung periodischer Probleme.

Periodische Funktionen

Es sei $L > 0$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **periodisch mit Periode L**, falls

$$f(x + L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Bemerkung

(i) Die trigonometrischen Funktionen sind periodisch:

- $\sin(x), \cos(x)$ haben Periode 2π
- $\sin(nx), \cos(nx)$ haben ebenfalls Periode 2π für alle $n \geq 1$

(ii) Ist f periodisch mit Periode L, so ist

$$\tilde{f}(x) = f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

periodisch mit Periode 2π, denn

$$\tilde{f}(x+2\pi) = f\left(\frac{L}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x + L\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) = \tilde{f}(x)\,.$$

Bei der Diskussion periodischer Funktionen kann man sich also auf 2π-periodische Funktionen beschränken. Zur Approximation 2π-periodischer Funktionen betrachtet man statt Polynomen oder Potenzreihen geeigneterweise **trigonometrische Polynome bzw. Reihen**

$$t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{1.3}$$

für Koeffizienten $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

Eigenschaften

(i) Eine trigonometrische Reihe der Form (1.3) ist gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{R}$, falls die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$$

konvergiert. Hinreichend für die Konvergenz dieser Reihe ist

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} n^\beta b_n = 0 \quad \text{für } \alpha, \beta > 1\,.$$

(ii) Eine trigonometrische Reihe der Form (1.3) ist $k-$mal stetig differenzierbar, falls die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k(|a_n| + |b_n|)$$

konvergiert. Hinreichend für die Konvergenz dieser Reihe ist

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} n^\beta b_n = 0 \quad \text{für } \alpha, \beta > k+1\,.$$

In diesem Falle lässt sich die Ableitung von t durch gliedweise Differentiation bestimmen:

$$t'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx))$$

und dies ist wieder eine trigonometrische Reihe.

Es sei f eine 2π-periodische Funktion. Gibt es dann eine trigonometrische Reihe

$$t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

mit $t(x) = f(x)$ für alle x, so heißt t **Fourierreihe zu** f und man sagt, dass f **in eine Fourierreihe entwickelbar** ist.

Welche Beziehung besteht zwischen f und den Koeffizienten a_n, b_n? Dazu halten wir zunächst folgende wichtige Eigenschaft trigonometrischer Funktionen fest.

Orthogonalitätsrelationen

Für $n, m \geq 0$ gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \geq 1 \\ 2\pi & \text{für } m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \geq 1 \\ 0 & \text{für } m = n = 0 \end{cases}$$

Insbesondere gilt also

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\,dx = 0\,, \quad \int_0^{2\pi} \sin(mx)\,dx = 0 \quad \text{für alle } m \geq 1\,.$$

Ist f in eine Fourier-Reihe entwickelbar, also

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_x \sin(nx))$$

und ist die trigonometrische Reihe gliedweise integrierbar (etwa falls gleichmäßig konvergent), so folgt

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos(mx)+b_m\sin(mx))\right)\cos(nx)\,dx\\ &= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\,dx+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\int_0^{2\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx+b_m\int_0^{2\pi}\sin(mx)\cos(nx)\,dx\\ &= a_n\pi\,.\end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = b_n\pi \qquad \text{also}$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{für } n=0,1,2,\ldots\\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad \text{für } n=1,2,\ldots\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Fourierreihe zu f sind also eindeutig bestimmt.

Definition Es sei f integrierbar auf $[0,2\pi]$. Die Zahlen

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\,,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

heißen **Fourierkoeffizienten von** f. Die mit den Fourierkoeffizienten gebildete Reihe

$$F_f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

heißt **Fourierreihe** von f.

Bemerkungen

(i) Zur Berechnung der Koeffizienten kann statt über $[0,2\pi]$ über ein beliebiges anderes Intervall der Länge 2π integriert werden, z.B. $[-\pi,\pi]$.

(ii) Für den Koeffizienten a_0 gilt speziell

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

Daher heißt $\frac{a_0}{2}$ **Mittelwert der Funktion** f.

(iii) Ist f **gerade**, also $f(-x)=f(x)$ für $x\in\mathbb{R}$, so folgt

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{für } n\geq 0\\ b_n &= 0 \quad \text{für } n\geq 1\end{aligned}$$

Denn es gilt

$$a_n\pi = \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \underbrace{2\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx}_{f \text{ und } cos(nx) \text{ gerade}}$$

$$\begin{aligned} b_n\pi &= \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ &= \underbrace{\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)\,dx}_{=-\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx} + \int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 0 \end{aligned}$$

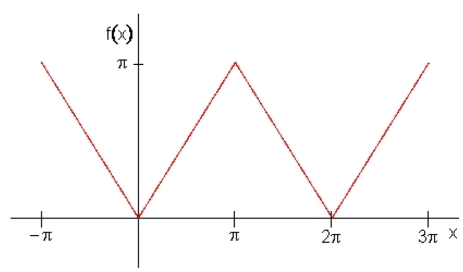
Analog gilt: Ist f **ungerade**, also $f(-x) = -f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, so folgt

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \quad \text{für } n \geq 0 \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad \text{für } n \geq 1 \end{aligned}$$

Beispiele 1.1

(i) f sei 2π-periodisch mit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x & \text{für } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$



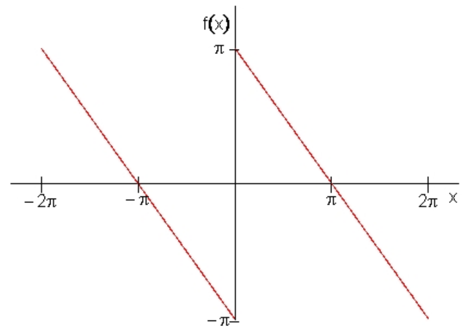
Da f gerade, ist $b_n = 0$ für alle n und

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \begin{cases} \pi & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Folglich ist

$$F_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \dots\right)$$

(ii) f sei 2π-periodisch mit $f(0) = 0$ und $f(x) = \pi - x$ für $0 < x < 2\pi$



'Sägezahnfunktion'

Da f ungerade, ist $a_n = 0$ für alle n und

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{n}$$

Folglich ist

$$F_f(x) = 2\left(\sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$$

Wie bei Taylorreihen gilt auch bei Fourierreihen:

1) Die Fourierreihe muss nicht konvergieren.

2) Ist F_f konvergent in x, so muss der Wert der Reihe, $F_f(x)$, nicht mit $f(x)$ übereinstimmen.

Hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Fourierreihe F_f gegen f

Satz Ist $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbar (d.h. es gibt eine Unterteilung $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2\pi$ von $[0, 2\pi]$, so dass f' auf $]x_{i-1}, x_i[$ existiert und stetig fortsetzbar auf $[x_{i-1}, x_i]$ für alle i), so konvergiert die Fourierreihe F_f für alle x und

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$$

Hierbei ist

$$f(x_+) = \lim_{y\to x+} f(y) \text{ der rechtsseitige Grenzwert, und}$$
$$f(x_-) = \lim_{y\to x-} f(y) \text{ der linksseitige Grenzwert von } f \text{ in } x\,.$$

In allen Punkten x also, in denen f stetig ist, folgt unter den Annahmen des Satzes, dass

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

Auf jedem abgeschlossenen Teilintervall, auf dem eine stückweise stetig differenzierbare Funktion f stetig ist, konvergiert die Fourierreihe F_f dann sogar gleichmäßig gegen f.

Beispiele 1.2

(i) f aus Beispiel 1.1 (i) ist stetig und stückweise stetig differenzierbar. Daher ist die zugehörige Fourierreihe

$$F_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \dots\right)$$

gleichmäßig konvergent gegen f.

Insbesondere gilt zum Beispiel

$$0 = f(0) = F_f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right)$$

also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(ii) f aus Beispiel 1.2 (ii) ist stückweise stetig differenzierbar, aber nicht stetig in 0. Es ist also

$$F_f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} \qquad \text{für alle } x\,.$$

Gibbssches Phänomen

Ist f stückweise stetig differenzierbar, aber nicht stetig in x, so konvergiert $F_f(x)$ gegen den Mittelwert $\frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))$. Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, vielmehr beobachtet man in x ein Überschwingen der Fourierpolynome mit asymptotisch etwa 9% der Sprunghöhe (genauer: 8,949%).

Beispiel 1.3 (Sägezahnfunktion aus Beispiel 1.1 (ii))

$$F_f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

Für die Partialsummen

$$s_n(x) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = 2\left(\sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} + \dots + \frac{\sin(nx)}{n}\right)$$

gilt

$$s_n(x) = \int_0^x \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt - \underbrace{x}_{=f(x)-\pi}$$

Für die Ableitung des Fehlers $r_n(x) = s_n(x) - f(x)$ folgt also

$$r_n'(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

mit kleinster positiver Nullstelle in $x_n = \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}$. Hier besitzt der Fehler r_n in der Tat ein globales Maximum mit

$$r_n(x_n) = \int_0^{x_n} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\,dt - \pi = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)\,du}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{u}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)} - \pi$$

$$> \underbrace{2\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u}\,du}_{\sim 1.8519} - \pi \sim 0.1789 \cdot \pi \sim 0.09 \cdot \underbrace{2\pi}_{\text{Sprunghöhe}}$$

Nebenrechnung zur Darstellung der Partialsumme:

$$\begin{aligned} s_n'(x) &= 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{i\,kx}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i\,x}\frac{1-e^{i\,nx}}{1-e^{i\,x}}\right) \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\,\frac{x}{2}} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{-i\,\frac{x}{2}} - e^{i\,\frac{x}{2}}}\right) = -\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right) \\ &= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \end{aligned}$$

und damit folgt

$$s_n(x) = \int_0^{x} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,dt - x$$

Allgemeine Perioden

Ist f periodisch mit Periode $L > 0$, so ersetzt man $\cos(nx)$, $\sin(nx)$ durch $\cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)$. Die zugehörige Fourierreihe lautet also

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)\right)$$

mit

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)\,dx,\ n = 0,1,2,\ldots \\ b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)\,dx,\ n = 1,2,\ldots \end{aligned}$$

Alle Aussagen zum 2π-periodischen Fall übertragen sich sinngemäß auf den Fall allgemeiner Periode.

Komplexe Schreibweise

Nach der **Eulerschen Formel** gilt

$$e^{i\,t} = \cos t + i\,\sin t\,,\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Daher können wir eine Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

auch in der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\,nx}\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

schreiben, mit den **komplexen Fourierkoeffizienten**

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\,nx}\,dx \\ &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(-nx)\,dx + i\,\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(-nx)\,dx \\ &= \begin{cases} \frac{a_0}{2} & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n - i\,b_n) & \text{für } n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_n + i\,b_n) & \text{für } n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2 Kurven im R^n

Zur Erinnerung:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

ist der n-**dimensionale Punktraum** mit den bekannten Rechenoperationen Addition und Skalarmultiplikation. Für einen Punkt $X = [x_1, \ldots, x_n]^T$ definieren wir seine **Norm** durch

$$\|X\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

mit den bekannten Eigenschaften

(i) **Positiv-Definitheit** $\|X\| \geq 0$ und $\|X\| = 0$ genau dann, wenn $X = 0$.

(ii) **Homogenität** $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$ für $\alpha \in \mathbb{R}$

(iii) **Dreiecksungleichung** $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

Für Punkte $X = [x_1, \ldots, x_n]^T, Y = [y_1, \ldots, y_n]^T$ ist das Skalarprodukt definiert durch

$$\langle X, Y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i \,.$$

Es gilt die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \cdot \|Y\| \quad \text{für } X, Y \in \mathbb{R}^n \,.$$

Abstände und Konvergenz von Folgen

Die Norm definiert einen Abstand zwischen Punkten X und Y im $\mathbb{R}^n$, indem wir als Abstand gerade $\|X - Y\|$ nehmen.
Für $\varepsilon > 0$ und $X \in \mathbb{R}^n$ heißt die Menge

$$U_\varepsilon(X) := \{Y \in \mathbb{R}^n : \|X - Y\| < \varepsilon\} \,,$$

also die Menge aller Punkte $Y \in \mathbb{R}^n$, deren Abstand zu X kleiner als ε ist, die ε-**Umgebung von** X. Geometrisch beschreibt $U_\varepsilon(x)$ im

- $\mathbb{R}^1$ das offene Intervall $]X - \varepsilon, X + \varepsilon[$
- $\mathbb{R}^2$ eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt X und Radius ε (ohne Rand)
- $\mathbb{R}^3$ einen Ball mit Mittelpunkt X und Radius ε (ohne die Balloberfläche).

Mithilfe des Abstandsbegriffes lässt sich nun auch Konvergenz von Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$ definieren:

Definition Es sei $(X_k)_{k \geq k_0}$ eine Folge von Punkten im $\mathbb{R}^n$. Die Folge heißt **konvergent** gegen $X \in \mathbb{R}^n$, falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\|X_k - X\| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq N\varepsilon$$

X heißt **Grenzwert** der Folge $(X_k)_{k \geq k_0}$ und wir schreiben

$$\lim_{k \to \infty} X_k = X\,.$$

Bemerkung

(i) Die Folge (X_k) konvergiert gegen X genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Folgenglieder außerhalb der ε-Umgebung um X liegen, d.h. alle, bis auf endlich viele, X_k liegen in $U_\varepsilon(X)$.

(ii) Ist $X_k = [x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}]^T$ und $X = [x_1, \ldots, x_n]^T$, so gilt:

$$\lim_{k \to \infty} X_k = X \ \text{ genau dann, wenn } \lim_{k \to \infty} x_{i,k} = x_i \ \text{ für alle } \ i = 1, \ldots, n$$

D.h. die Punktfolge $(X_k)_{k \geq k_0}$ konvergiert im $\mathbb{R}^n$ gegen X genau dann, wenn die Komponentenfolgen $(x_{i,k})_{k \geq k_0}$ gegen die Komponenten x_i von x konvergieren.

Definition Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Interval. Eine Abbildung $X : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt **Kurve** (bzw. **Weg**) im $\mathbb{R}^n$. Die Punktmenge

$$\{X(t) : t \in [a, b]\}$$

heißt **Bahn** (bzw. **Spur**) der Kurve X.
Eine Kurve $X(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]^T$, $t \in [a, b]$, im $\mathbb{R}^n$ setzt sich zusammen aus insgesamt n **Komponentenfunktionen**.

Beispiele Kurven dienen der Parameterdarstellung von Punktmengen im $\mathbb{R}^n$, etwa

(i) $n = 2$ **Kreislinie** Die Kurve

$$X(t) = [\cos(t), \sin(t)]^T \,, t \in [0, 2\pi]$$

durchläuft den Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ einmal im entgegengesetzten Uhrzeigersinn. Entsprechend

$$X(t) = r[\cos(t), \sin(t)]^T \,, t \in [0, 2\pi] \,, r > 0$$

für einen Kreis mit Radius r.

(ii) $n = 3$ **Schraublinie**

$$X(t) = [r\cos(t), r\sin(t), ct]^T \,, t \in [0, 2\pi n] \,, r > 0, c \neq 0$$

durchläuft eine Schraublinie im $\mathbb{R}^3$.

- r heißt Radius,

- n heißt Windungszahl,
- $2\pi|c|$ heißt Ganghöhe.

(iii) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so beschreibt

$$X(t) = [t, f(t)]\,, t \in [a,b]$$

den Funktionsgraph von f als Kurve im $\mathbb{R}^2$.

(iv) Sind $P, R \in \mathbb{R}^n, R \neq 0$, so beschreibt die Kurve

$$X(t) = P + t \cdot R\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

die Gerade mit Aufpunkt P und Richtungsvektor R.

Definition Eine Kurve $X = [x_1, \dots, x_n]^T\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt

(i) **stetig**, falls alle Komponentenfunktionen $x_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sind,

(ii) **differenzierbar**, falls alle Komponentenfunktionen $x_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind. In diesem Falle schreiben wir

$$\dot{X}(t) := \frac{d}{dt}X(t) := \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(X(t+h) - X(t)) = [\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)]^T$$

$\dot{X}(t)$ heißt **Tangentialvektor** der Kurve X zum Parameterwert t. Falls $\dot{X}(t) \neq 0$, so heißt $T(t) = \frac{\dot{X}(t)}{\|X(t)\|}$ **Tangenteneinheitsvektor**.

(iii) **regulär**, falls X stetig differenzierbar und $\dot{X}(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$.

Interpretation
Geometrisch $\dot{X}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\underbrace{X(t+h) - X(t)}_{Sekante})$
Geometrisch beschreibt $\dot{X}(t)$ also die **Tangente** an die Bahn von X im Punkt $X(t)$.

Physikalisch Stellen wir uns X als Bahnkurve eines Massenpunktes vor, so beschreibt $\dot{X}(t)$ die momentane Ortsveränderung, also den Geschwindigkeitsvektor des Massenpunktes im Zeitpunkt t.

Kurvenlänge

Es sei $X : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$. Zu gegebener Zerlegung Z von $[a,b]$ der Form

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

beschreibt

$$L(X, Z) = \sum_{i=1}^{n} \|X(t_i) - X(t_{i-1})\|$$

die Länge des Polygonzuges durch die Punkte

$$X(a) = X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n) = X(b)$$

Ist X stetig differenzierbar, so können wir die Länge des i-ten Teilstücks approximieren durch

$$\|X(t_i) - X(t_{i-1})\| \sim \|\dot{X}(t_i)\|(t_i - t_{i-1})$$

und damit

$$L(X,Z) \sim \sum_{i=1}^{n} \|\dot{X}(s_i)\|(t_i - t_{i-1}) \tag{2.1}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite (2.1) ist eine Riemann-Summe zur Funktion $f(t) = \|\dot{X}(t)\|$ und Zerlegung Z. Konvergiert die Feinheit der Zerlegung Z

$$\delta(Z) = \max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}$$

gegen 0, so passt sich der Polygonzug immer genauer dem exakten Verlauf der Kurve an und die zugehörigen Riemann-Summen konvergieren

$$L(X,Z) = \sum_{i=1}^{n} \|X(t_i) - X(t_{i-1})\| \sim \sum_{i=1}^{n} \|\dot{X}(t_i)\|(t_i - t_{i-1}) \overset{\delta(Z)\to 0}{\to} \int_a^b \|\dot{X}(t)\|\,dt$$

Der Fehler, der bei der Approximation von $L(X,Z)$ durch die Riemann-Summe in (2.1) gemacht wurde, geht dabei asymptotisch gegen 0, d.h. es gilt

$$\lim_{\delta(Z)\to 0} L(X,Z) = \int_a^b \|\dot{X(t)}\|\,dt\,.$$

Definition Ist $X : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbare Kurve im $\mathbb{R}^n$, so ist die Länge $L(X)$ von X definiert als das Riemann-Integral

$$L(X) = \int_a^b \|\dot{X}(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\dot{X_1}^2(t) + \cdots + \dot{X_n}^2(t)}\,dt$$

Beispiele

(i) $X(t) = r\,[\cos(t), \sin(t)]^T$, $t \in [0, 2\pi]$, ist stetig differenzierbar, $\dot{X}(t) = r\,[-\sin(t), \cos(t)]^T$, also gilt

$$\|\dot{X}(t)\| = \underbrace{\sqrt{(r(-\sin(t)))^2 + (r\cos(t))^2}}_{=r^2((\sin(t))^2+(\cos(t))^2)=r^2} = r$$

und somit

$$L(X) = \int_0^{2\pi} \|\dot{X}(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = r \cdot 2\pi = \text{ Umfang des Kreises mit Radius } r$$

(ii) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $X(t) = [t, f(t)]^T$ die Parametrisierung des Funktionsgraphen, so ist

$$L(X) = \int_a^b \|\dot{X}(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,dt$$

seine **Länge**.

Zum Beispiel ergibt sich für die Normalparabel $f(t) = t^2$, $t \in [-1, 1]$, als Länge für den dazugehörigen Funktionsgraphen

$$L(X) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+4t^2}\, dt = \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right)$$

Haben dabei verwandt, dass $\frac{1}{4}\left(2t\sqrt{1+4t^2} + \ln(2t + \sqrt{1+4t^2})\right)$ Stammfunktion zu $\sqrt{1+4t^2}$ ist.

Bemerkung Die Länge einer Kurve kann auch für stetige, stückweise stetig differenzierbare Kurven $X : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ definiert werden. (X heißt stückweise stetig differenzierbar, falls eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ existiert, so dass X auf $]t_{i-1}, t_i[$ zu einer stetig differenzierbaren Kurve auf $[t_{i-1}, t_i]$ fortsetzbar ist.)

Beispiel

$$X(t) = \begin{cases} [0, t]^T & \text{für } t \in [0, 1] \\ [t-1, 2-t]^T & \text{für } t \in]1, 2] \end{cases}, \quad \text{also} \quad \|\dot{X}(t)\| = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, 1] \\ \sqrt{2} & \text{für } t \in]1, 2] \end{cases}$$

und somit $L(X) = \int_0^1 1\, dt + \int_1^2 \sqrt{2}\, dt = 1 + \sqrt{2}$.

Krümmung von Kurven

Es sei X zweimal stetig differenzierbare reguläre Kurve. Die Änderung der Geschwindigkeitsrichtung einer Kurve, bezogen auf die Kurvenlänge

$$\frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{X}(t)\|} = \lim_{h \to 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{\|X(t+h) - X(t)\|}$$

beschreibt die **Krümmungsrichtung** von X in $X(t)$.
Seine Länge $\kappa(t) = \frac{\|\dot{T}(t)\|}{\|\dot{X}(t)\|}$ heißt **Krümmung**.

Beispiel Kreislinie mit Radius r

$$X(t) = r\,[\cos(t), \sin(t)]^T, t \in [0, 2\pi]$$

Für den Tangentialvektor gilt

$$T(t) = \frac{\dot{X}(t)}{\|X(t)\|} = [-\sin(t), \cos(t)]^T \quad \text{unabhängig vom Radius } r!$$

Der Krümmungsvektor, also die Änderung der Tangentialrichtung,

$$\dot{T}(t) = -[\cos(t), \sin(t)]^T = -\frac{1}{r} X(t)$$

zeigt zum Kreismittelpunkt. Für die Krümmung errechnet man $\kappa(t) = \frac{1}{r}$. Sie ist also umgekehrt proportional zum Radius des Kreises.

Kurven im $\mathbb{R}^3$

Es sei $X : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine zweimal stetig differenzierbare reguläre Kurve im $\mathbb{R}^3$ mit $\dot{T}(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Dann stehen die drei Einheitsvektoren

$$
\begin{aligned}
T(t) &= \frac{\dot{X}(t)}{\|\dot{X}(t)\|} \quad \text{(Tangenteneinheitsvektor)}\\
N(t) &= \frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{T}(t)\|} \quad \text{(Hauptnormaleneinheitsvektor)}\\
B(t) &= T(t) \times N(t) \quad \text{(Binormaleneinheitsvektor)}
\end{aligned}
$$

orthogonal aufeinander und bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (das sogenannte **begleitende Dreibein**).

Die von $T(t)$ und $N(t)$ aufgespannte Ebene

$$E(t) : X(t) + \lambda T(t) + \mu N(t) \;\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

heißt **Schmiegeebene** von X an der Stelle $X(t)$.

Es sei X dreimal differenzierbare reguläre Kurve mit $\dot{T}(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Die Änderung der Binormalenrichtung bezogen auf die Kurvenlänge

$$\frac{\dot{B}(t)}{\|\dot{X}(t)\|} = \lim_{h \to 0} \frac{B(t+h) - B(t)}{\|X(t+h) - X(t)\|}$$

beschreibt das Herauswinden der Kurve aus der Schmiegeebene und wird als **Torsionsvektor** bezeichnet. $\dot{B}(t)$ ist orthogonal zu $B(t)$ und auch orthogonal zu $T(t)$, denn

$$\dot{B}(t) = \frac{d}{dt}\left(T(t) \times N(t)\right) = \dot{T}(t) \times N(t) + T(t) \times \dot{N}(t) = T(t) \times \dot{N}(t)\,.$$

Damit gibt es $\tau(t)$ mit

$$\frac{\dot{B}(t)}{\|\dot{X}(t)\|} = -\tau(t) N(t)\,.$$

$\tau(t)$ heißt **Torsion**. Für den Absolutbetrag gilt $|\tau(t)| = \frac{\|\dot{B}(t)\|}{\|\dot{X}(t)\|}$.

Beispiel (Schraublinie)

$$X(t) = [r\cos(t), r\sin(t), ct]^T\,, t \in [0, 2\pi n], r > 0, c > 0$$

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ c \end{bmatrix}, \ddot{X}(t) = \begin{bmatrix} -r\cos(t) \\ -r\sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \dddot{X}(t) = \begin{bmatrix} r\sin(t) \\ -r\cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Also gilt

$$T(t) = \frac{1}{R}[-r\sin(t), r\cos(t), c]^T\,, R = \sqrt{r^2 + c^2}$$

$$N(t) = [-\cos(t), -\sin(t), 0]^T\,, \quad B(t) = T(t) \times N(t) = \frac{1}{R}[c\sin(t), -c\cos(t), r]^T$$

Hieraus erhält man schließlich Krümmung $\kappa(t) \equiv \frac{r}{r^2+c^2}$ und Torsion $\tau(t) \equiv \frac{c}{r^2+c^2}$.

3 Funktionen in mehreren Variablen

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion

$$\begin{aligned} &f : D \to \mathbb{R}\,, \\ &X = [x_1, \ldots, x_n] \mapsto f(X) = f(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

heißt **Funktion in n-Variablen**.

Beispiele

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3xy + 2x \quad \text{auf } \mathbb{R}^2 \\ f(x,y,z) &= e^z + \sin(x+y) \quad \text{auf } \mathbb{R}^3 \\ f(X) &= \|X\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Darstellungsweisen

Wie im Falle $n = 1$ definieren wir den **Funktionsgraphen von f** als die Menge

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subset D \times \mathbb{R} \qquad (\subset \mathbb{R}^{n+1})$$

Beispiele Für $n = 2$ beschreibt der Funktionsgraph von f eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, etwa einen Paraboloid im Falle von $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Für $n \geq 3$ können wir den Funktionsgraphen als Fläche im $\mathbb{R}^3$ nicht mehr darstellen. Als Alternativen bieten sich an

Schnittkurvendiagramme

Hält man jeweils $n-1$ Variablen fest, etwa $x_1, \ldots, x_{n-1}$, so erhält man aus f eine Funktion in einer Variablen:

$$t \mapsto f(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$$

Der zugehörige Funktionsgraph ist die Menge

$$\{(t, f(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)) : (x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \in D\} \subset \mathbb{R}^2$$

und er wird als Schnittkurve (von Γ_f mit der $(x_1, \ldots, x_{n-1})$-Ebene) bezeichnet.

Beispiel $(n = 2)$ $f(x,y) = x^2 + y^2$ Hält man x (bzw. y) fest, so erhält man in der jeweils anderen Variablen eine Parabel.

Höhenliniendiagramme

Als weitere Alternative zur Darstellung einer Funktion in mehreren Variablen betrachtet man Höhenliniendiagramme.

Definition Zu gegebenem $c \in \mathbb{R}$ heißt die Punktmenge

$$N_c = \{X \in D : f(X) = c\}$$

die **Niveaumenge zum Niveau c** (und für $n = 2$ speziell Höhenlinie zur Höhe c).

Man bestimmt die Menge N_c durch **Auflösen der Gleichung**

$$f(X) = c \quad \text{nach} \quad X\,.$$

Beispiel $(n = 2)$ $f(x, y) = x^2 + y^2$
Die Gleichung $x^2 + y^2 = c$ hat für

- $c < 0$ keine Lösung
- $c = 0$ die Lösung $x = y = 0$
- $c > 0$ einen Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $\sqrt{c}$ als Lösung.

Stetigkeit von Funktionen in mehreren Variablen

Aufbauend auf dem Konvergenzbegriff von Folgen im $\mathbb{R}^n$ können wir nun auch den Stetigkeitsbegriff auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen.

Definition Es sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ und $X \in \mathbb{R}^n$ so dass X Häufungspunkt von D (d.h. in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(X)$ gibt es Punkte aus D):

(i) (Grenzwerte von Funktionen) f besitzt in X den Grenzwert c, falls

$$\lim_{k\to\infty} f(X_k) = c$$

für **jede Folge** $(X_k) \subset D$ mit $\lim_{k\to\infty} X_k = X$. Wir schreiben in diesem Falle $\lim_{Y\to X} f(Y) = c$.

(ii) (Stetigkeit) Ist $X \in D$, so heißt f **stetig in** X, falls

$$\lim_{Y\to X} f(Y) = f(X)$$

(iii) f heißt **stetig auf** D, falls f in allen Punkten $X \in D$ stetig ist.

Bemerkungen

(i) Die **Rechenregeln für Grenzwerte** für Funktionen einer Veränderlichen übertragen sich auf Funktionen mehrerer Veränderlicher, also

$$\begin{aligned}
&\lim_{Y\to X} f(Y) + g(Y) = \lim_{Y\to X} f(Y) + \lim_{Y\to X} g(Y)\\
&\lim_{Y\to X} f(Y)\cdot g(Y) = \lim_{Y\to X} f(Y)\cdot \lim_{Y\to X} g(Y)\\
&\lim_{Y\to X} cf(Y) = c\lim_{Y\to X} f(Y)\\
&\lim_{Y\to X} \frac{f(Y)}{g(Y)} = \frac{\lim_{Y\to X} f(Y)}{\lim_{Y\to X} g(Y)} \quad \text{falls} \quad \lim_{Y\to X} g(Y) \neq 0
\end{aligned}$$

(ii) Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt wie im Falle von Funktionen einer Veränderlicher: Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig, so sind auch folgende Funktionen stetig:

$$f+g,\ f\cdot g,\ c\cdot f \text{ und } \frac{f}{g} \text{ auf } D_0 = \{\, X \in D \mid g(X) \neq 0 \,\}$$

Ist $h : E \to \mathbb{R}$ stetig, $f(D) \subset E$, so ist auch die Verkettung $h \circ f$ stetig.

Beispiele 3.1

(i) Die Projektionen $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x = [x_1, \dots, x_n] \mapsto x_i$ sind stetig. Damit sind dann auch die folgenden Funktionen stetig:

- lineare Funktionen $f(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$
- Polynome in n-Variablen $p(x) = p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1\le k_i \le m} a_{k_1\dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$
- rationale Funktionen (also Quotienten von Polynomen) $\frac{p(x)}{q(x)}$ auf $D_0 = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \neq 0 \,\}$

(ii) Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{für } [x,y]^T \neq [0,0]^T \\ 0 & \text{für } [x,y]^T = [0,0]^T \end{cases}$$

ist stetig in 0, denn für **jede** Folge $X_k = [x_k, y_k]^T$, die gegen 0 konvergiert, gilt:

$$|f(x_k, y_k) - 0| = \frac{x_k^2 y_k^2}{x_k^2 + y_k^2} \le y_k^2 \to 0$$

daher ist $\lim_{X\to 0} f(X) = 0 = f(0)$.

(iii) Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } [x,y]^T \neq [0,0]^T \\ 0 & \text{für } [x,y]^T = [0,0]^T \end{cases}$$

ist **nicht stetig in** 0, denn für die Folge $X_k = [\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]^T$ gilt $\lim_{k\to\infty} X_k = 0$, aber

$$f(X_k) = f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

und damit

$$\lim_{k\to\infty} f(X_k) = \frac{1}{2} \neq f(0)\,.$$

Eigenschaften stetiger Funktionen

Für stetige Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ hatten wir bereits gesehen:

- f ist beschränkt
- f besitzt Maximum und Minimum

Entsprechendes gilt für die Funktionen in mehreren Veränderlichen. Dazu muss jedoch zuerst eine Verallgemeinerung abgeschlossener Intervalle im $\mathbb{R}^n$ gefunden werden.

Definition Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge

(i) $X \in D$ heißt **innerer Punkt von** D, wenn es eine ε-Umgebung von X gibt, die ganz in D enthalten ist.

(ii) D heißt **offen**, wenn jeder Punkt von D ein innerer Punkt ist.

(iii) $X \in \mathbb{R}^n$ heißt **Randpunkt von** D, wenn jede ε-Umgebung von X sowohl Punkte aus D, als auch Punkte aus dem Komplement $\mathbb{R}^n \setminus D = \{Y \in \mathbb{R}^n : Y \notin D\}$ enthält.

Die Menge aller Randpunkte von D heißt **Rand** und wird mit ∂D bezeichnet.

(iv) D heißt **abgeschlossen**, wenn D alle Randpunkte enthält.

Beispiele

(i) Die ε-Umgebung eine Punktes X

$$U_\varepsilon(X) = \{Y \in \mathbb{R}^n : \|X - Y\| < \varepsilon\}$$

ist selber eine offene Menge mit Rand

$$\partial U_\varepsilon(X) = \{Y \in \mathbb{R}^n : \|X - Y\| = \varepsilon\}$$

Folglich ist die Menge $\{Y \in \mathbb{R}^n : \|X - Y\| \le \varepsilon\}$ abgeschlossen.

(ii) Rechtecke $Q \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$Q = \{[x, y]^T : 1 < x < 2, -2 < y < 5\}$$

sind offen, Rechtecke Q der Form

$$Q = \{[x, y]^T : 1 \le x \le 2, -2 \le y \le 5\}$$

abgeschlossen, Rechtecke der Form

$$Q = \{[x, y]^T : 1 < x \le 2, -2 \le y < 5\}$$

sind weder offen noch abgeschlossen.

Entsprechendes gilt für Quader $Q \subset \mathbb{R}^3$.

Definition Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge

(i) D heißt **beschränkt**, falls eine Konstante M existiert mit

$$\|X\| \le M \quad \text{für alle } X \in D$$

(ii) D heißt **kompakt**, falls D abgeschlossen und beschränkt ist.

Die kompakten Mengen sind gerade die Analoga abgeschlossener, beschränkter Intervalle $[a, b]$, denn es gilt: Ist $F : D \to \mathbb{R}$ stetig und $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann gilt

(i) f ist beschränkt.

(ii) **Existenz des Maximums / Minimums**:
Es existieren $X_{\max}, X_{\min} \in D$ mit

$$f(X_{\min}) \leq f(X) \leq f(X_{\max}) \quad \forall X \in D$$