Lösungsvorschlag, 10. Übung, Mathe II f. BI, WIBI, MaWi, Geo SS 2007

G28

zu (a):

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2-x} xyz\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x}\left[\frac{xyz^2}{2}\right]_{z=0}^{z=2-x} dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x}\frac{xy(2-x)^2}{2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1\left[\frac{xy^2(2-x)^2}{4}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{4}\int_0^1 4x - 12x^2 + 13x^3 - 6x^4 + x^5\,dx = \frac{13}{240}.$$

zu (b): Man erinnere sich an $\arcsin 1 = -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}$ und integriere von innen nach außen:

$$\iiint_G z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_{-z}^{z}\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} z\,dy\,dx\,dz = \int_0^1\int_{-z}^{z} 2z\sqrt{z^2-x^2}\,dx\,dz$$

$$= \int_0^1 z\left[x\sqrt{z^2-x^2} + z^2\arcsin\frac{x}{z}\right]_{x=-z}^{x=z} dz$$

$$= \int_0^1 z\,(0 + z^2\arcsin 1 - 0 - z^2\arcsin(-1))\,dz = \pi\int_0^1 z^3\,dz = \frac{\pi}{4}.$$

G29

zu (a): Zur Transformation nehmen wir die Funktionen $x(r,\theta) = 1 + r\cos\theta$ und $y(r,\theta) = r\sin\theta$. Mit dieser Wahl erhalten wir dann folgende Jacobi-Determinante:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} := \det\begin{pmatrix} x_r(r,\theta) & x_\theta(r,\theta) \\ y_r(r,\theta) & y_\theta(r,\theta)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

In Polarkoordinaten ausgedrückt haben wir nun den folgenden Integrationsbereich:

$$B_R^{polar} = \{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Damit können wir nun rechnen:

$$I(R) = \iint_{B_R} e^{-((x-1)^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_{B_R^{polar}} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\,e^{-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[-e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=R} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 - e^{-R^2}\right)d\theta = \pi\left(1 - e^{-R^2}\right).$$

... und erhalten damit als Grenzwert:

$$\lim_{R\to\infty} I(R) = \pi\lim_{R\to\infty}\left(1 - e^{-R^2}\right) = \pi.$$

b)

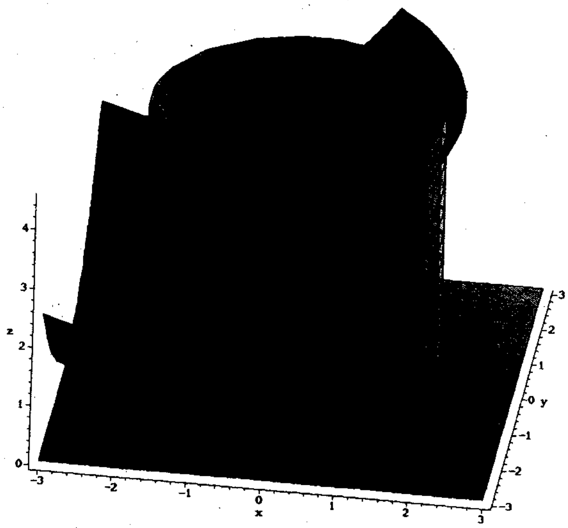
In Zylinderkoordianten ist ein wenig Vorarbeit zu leisten, dafür wird's beim Integrieren hübsch einfach. An dem Zylinder ist nichts mehr zu tun (klar, bei *Zylinder*koordinaten). Nun die Höhe muß ein wenig umgeformt werden:

$$(x+2)^2 + y^2 = 4z \quad\Leftrightarrow\quad (r\cos\varphi + 2)^2 + r^2\sin^2\varphi = 4t \quad\Leftrightarrow\quad t = \frac{1}{4}r^2 + r\cos\varphi + 1.$$

Damit rechnen wir dann wie folgt (Hinweis, insbesondere für Klausuren: Transformationsfaktor r beim Übergang auf Zylinderkoordinaten wird gerne vergessen!):

$$V=\iiint_T 1\,dx\,dy\,dz=\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{4}r^2+r\cos\varphi+1} r\,dt\,d\varphi\,dr=\int_0^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}r^2+r\cos\varphi+1\right)r\,d\varphi\,dr$$

$$=\int_0^2\left[\frac{1}{4}r^3\varphi+r^2\sin\varphi+r\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}dr=\int_0^2\frac{\pi}{2}r^3+2r\pi\,dr=\left[\frac{\pi}{8}r^4+\pi r^2\right]_{r=0}^{r=2}=6\pi,$$

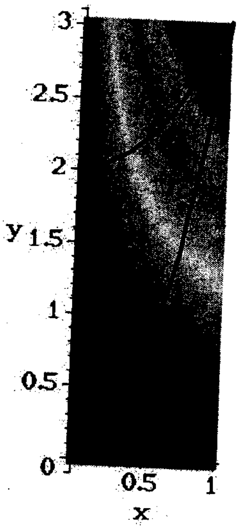


650

Für die Masse gilt:

$$M=\iint_B\delta(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_{3x^2}^{x^2+2}2x^2y\,dy\,dx=\int_0^1\left[x^2y^2\right]_{y=3x^2}^{y=x^2+2}dx=\int_0^1 x^6+4x^4+4x^2-9x^6\,dx$$

$$=\left[-\frac{8}{7}x^7+\frac{4}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1}=-\frac{8}{7}+\frac{4}{5}+\frac{4}{3}=\frac{104}{105}=0{,}9904\ldots.$$



Damit erhalten wir die folgenden Koordinaten für den Schwerpunkt:

$$x_S=\frac{1}{M}\cdot\iint_B x\,\delta(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{M}\cdot\int_0^1\int_{3x^2}^{x^2+2}2x^3y\,dy\,dx=\frac{1}{M}\cdot\int_0^1\left[x^3y^2\right]_{y=3x^2}^{y=x^2+2}dx$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\int_0^1 x^7+4x^5+4x^3-9x^7\,dx=\frac{1}{M}\cdot\left[-x^8+\frac{4}{6}x^6+x^4\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\left(-1+\frac{2}{3}+1\right)=\frac{2}{3M}=\frac{35}{52}\approx 0{,}6730\ldots,$$

$$y_S=\frac{1}{M}\cdot\iint_B y\,\delta(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{M}\cdot\int_0^1\int_{3x^2}^{x^2+2}2x^2y^2\,dy\,dx=\frac{1}{M}\cdot\int_0^1\left[\frac{2}{3}x^2y^3\right]_{y=3x^2}^{y=x^2+2}dx$$

$$=\frac{2}{3M}\cdot\int_0^1 -26x^8+6x^6+12x^4+8x^2\,dx=\frac{2}{3M}\left[-\frac{26}{9}x^9+\frac{6}{7}x^7+\frac{12}{5}x^5+\frac{8}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$=\frac{2}{3M}\left(-\frac{26}{9}+\frac{6}{7}+\frac{12}{5}+\frac{8}{3}\right)=\frac{1912}{945M}=\frac{239}{117}\approx 2{,}0427\ldots.$$