Lösungsvorschlag, 9. Übung, Mathe II f. BI, WIBI, MaWi, Geo SS2007

G25

Die Approximation 2. Ordnung in $(x_0, y_0) = (1, 1)$ hat folgende Gestalt

$$f(x,y) \approx f(1,1) + \operatorname{grad} f(1,1) \cdot (x-1, y-1)^T + \frac{1}{2}(x-1, y-1)\, H_f(1,1)\,(x-1, y-1)^T.$$

Dann ist

$$f(1,1) = 5 + e^2.$$

Für die benötigten partiellen Ableitungen gilt:

$$f_x(x,y) = 3y^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad f_y(x,y) = 6xy + 2e^{2y},$$

also

$$f_x(1,1) = 4, \qquad f_y(1,1) = 6 + 2e^2.$$

Damit erhalten wir folgenden Gradienten:

$$\operatorname{grad} f(1,1) = (4, 6 + 2e^2).$$

Für die höheren partiellen Ableitungen gilt:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}, \qquad f_{yy}(x,y) = 6x + 4e^{2y}, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 6y,$$

also

$$f_{xx}(1,1) = -\frac{1}{2}, \qquad f_{yy}(1,1) = 6 + 4e^2, \qquad f_{xy}(1,1) = f_{yx}(1,1) = 6.$$

Damit bekommt die Hesse-Matrix die folgenden Einträge:

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 6 \\ 6 & 6 + 4e^2 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir dieses in unsere Approximationsformel ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx 5 + e^2 + (4, 6 + 2e^2)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, y-1)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 6 \\ 6 & 6 + 4e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \\ &= 5 + e^2 + 4(x-1) + (6 + 2e^2)(y-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + 6(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(6 + 4e^2)(y-1)^2. \end{aligned}$$

G26

Gemäß dem Lagrange-Ansatz ist zuerst die folgende Hilfsfunktion aufzustellen:

$$h(x, y, \lambda) = x^2y^2 + \lambda(5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8).$$

Dann untersuchen wir das folgende Gleichungssystem:

$$\left|\begin{array}{lllll} 0 & = & \frac{\partial h}{\partial x}(x,y,\lambda) & = & 2xy^2 + 10\lambda x - 6\lambda y, \\ 0 & = & \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,\lambda) & = & 2x^2y - 6\lambda x + 10\lambda y, \\ 0 & = & \frac{\partial h}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) & = & 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8. \end{array}\right.$$

Dieses Gleichungssystem gilt es nun aufzulösen. Wir multiplizieren dazu die erste Zeile mit x und die zweite Zeile mit y und setzen sie gleich:

$$2x^2y^2 + 10\lambda x^2 - 6\lambda xy = 2x^2y^2 - 6\lambda xy + 10\lambda y^2 \quad \overset{-2x^2y^2 + 6\lambda xy}{\Rightarrow} \quad 10\lambda x^2 = 10\,\lambda y^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda(x^2 - y^2) = 0.$$

Wir erhalten daraus die folgenden drei Fälle, die einer näheren Untersuchung bedürfen:

1. Fall, $\lambda = 0$. Dann reduzieren sich die ersten beiden Zeilen zu $0 = 2xy^2$ bzw. $0 = 2x^2y$ und wir erhalten wiederum zwei Fälle:

1.1. Fall, $\lambda = 0$ und $x = 0$. Aus der dritten Zeile folgt nun:

$$0 = 5y^2 - 8 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{\frac{8}{5}} \quad \vee \quad y = -\sqrt{\frac{8}{5}}.$$

1.2. Fall, $\lambda = 0$ und $y = 0$. Aus der dritten Zeile folgt dann:

$$0 = 5x^2 - 8 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{8}{5}} \quad \vee \quad x = -\sqrt{\frac{8}{5}}.$$

2. Fall, $x = y$. Hier liefert die dritte Zeile:

$$0 = 5x^2 - 6x^2 + 5x^2 - 8 \quad \Rightarrow \quad 2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2} \quad \vee x = -\sqrt{2}$$

(und damit $\lambda = -1$).

3. Fall, $x = -y$. Die dritte Zeile sagt uns:

$$0 = 5x^2 + 6x^2 + 5x^2 - 8 \quad \Rightarrow \quad 8 = 16x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

(und damit $\lambda = \frac{-1}{16}$). Wir erhalten somit die folgende Sammlung an interessanten Punkten:

$$\left(0, \sqrt{\frac{8}{5}}\right), \quad \left(0, -\sqrt{\frac{8}{5}}\right), \quad \left(\sqrt{\frac{8}{5}}, 0\right), \quad \left(-\sqrt{\frac{8}{5}}, 0\right),$$

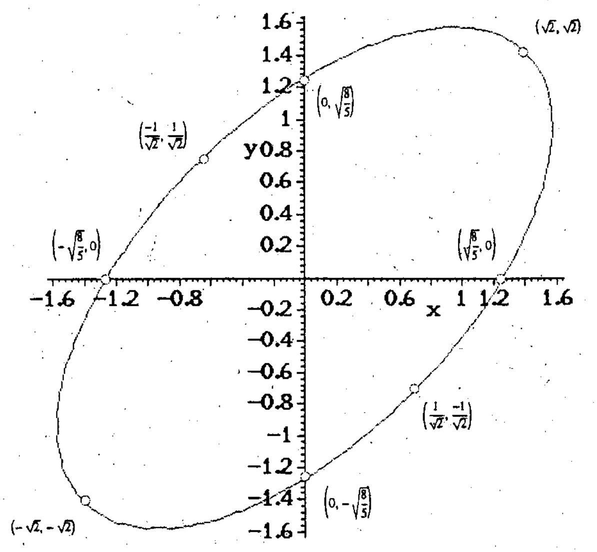
$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

welche nun weiter untersucht werden müssen. In der Nebenbedingungsfunktion g erkennen wir eine ~~Kreis-~~ Ellipsen-gleichung. Somit können wir durch Ausrechnen der Funktionswerte die Art des Extremums bestimmen. Ferner ist der kleinste bzw. der größte unter diesen Werten das globale Minimum bzw. Maximum. Es gilt:

$$f\left(0, \sqrt{\frac{8}{5}}\right) = 0, \quad f\left(0, -\sqrt{\frac{8}{5}}\right) = 0, \quad f\left(\sqrt{\frac{8}{5}}, 0\right) = 0, \quad f\left(-\sqrt{\frac{8}{5}}, 0\right) = 0,$$

$$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4, \quad f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4},$$

und da die Nebenbedingungsmenge eine Ellipse ist, ist damit ist klar, daß die erste vier Punkte globale Minima sind (mit Funktionswert 0), die nächsten beiden Punkte sind die globalen Maxima und die letzten beiden lediglich lokale Maxima.



G27

Es ist $G = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1\ ,\ 1 \le y \le 3\}$

a)

$$\iint_G \left(\frac{y}{x+1} + \frac{x}{y}\right) dx\, dy = \int_0^1 \int_1^3 \left(\frac{y}{x+1} + \frac{x}{y}\right) dy\, dx = \int_0^1 \left|\frac{1}{2}\frac{y^2}{x+1} + x \ln y\right|_1^3 dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4}{x+1} + x \ln 3\right) dx = \left|4 \ln(x+1) + \frac{\ln 3}{2} x^2\right|_0^1 = 4 \ln 2 + \frac{\ln 3}{2}$$

b)

$$\iint_G e^{x+y}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_1^3 e^{x+y}\, dy\, dx = \int_0^1 \left|e^{x+y}\right|_1^3 dx$$

$$= \int_0^1 (e^{x+3} - e^{x+1}) dx = \left|e^{x+3} - e^{x+1}\right|_0^1 = e^4 - e^3 - e^2 + e$$