G16

Es gilt

$$x^2+2y^2+3z^2-4xy-4yz=(x,y,z)\,A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$

mit

$$A:=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A lautet

$$\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\-2&2-\lambda&-2\\0&-2&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)-4(1-\lambda)-4(3-\lambda)$$

$$=(2-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+1)$$

Somit sind $\lambda_1=2$, $\lambda_2=5$ und $\lambda_3=-1$ die Eigenwerte von A.

Bestimme Eigenvektoren zu $\lambda_1=2$

$$\begin{pmatrix}-1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-2&0\\0&4&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-2&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Wähle $x_3 = t \in \mathbb{R}$ frei, damit

$$2x_2 = x_3 = t \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2} t$$

$$x_1 = -2x_2 = -t$$

Somit Eigenraum

$$E_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Aus diesem wählen wir den normierten Vektor

$$b_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 5$.

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wähle $x_3 = t \in \mathbb{R}$ frei, damit

$$x_2 = -x_3 = -t, \qquad 2x_1 = -x_2 = t \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2} t.$$

Somit Eigenraum

$$E_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aus diesem wählen wir den normierten Vektor

$$b_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimme Eigenvektoren zu $\lambda_3 = -1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wähle $x_3 = t \in \mathbb{R}$ frei, damit

$x_2 = 2x_3 = 2t$, $\quad x_1 = x_2 = 2t$.

Somit Eigenraum

$$E_3 = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Aus diesem wählen wir den normierten Vektor

$$b_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren ist demnach

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit der Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ergibt sich dann

$$(x', y', z')\, B^T A B \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (x', y', z') \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= 2(x')^2 + 5(y')^2 - (z')^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{(y')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} - (z')^2 = 0$$

Die Quadrik beschreibt also einen Kegel.

G17

zu (a): Die Niveaulinien genügen den Gleichungen $f(x,y) := \arcsin(2x+y) = c$, wobei c eine Konstante ist. Es gilt damit $2x + y = \sin c$, also $y = \sin c - 2x$. Die Niveaulinien sind Geraden durch den Punkt $(0, \sin c)^T$ mit Steigung -2.

zu (b): Die Richtungsableitungen lauten

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} + \frac{\cos x}{\cos y} + 4x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} + \frac{\sin x \sin y}{\cos^2 y} - 1,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{x+y+z} + 10xy + yz + z \sin y \sin(xz),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = \frac{1}{x+y+z} + 5x^2 + xz - \cos y \cos(xz),$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = \frac{1}{x+y+z} + xy + x \sin y \sin(xz).$$

G18

a) Es gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4Ax^3 + 4Bxy^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4Bx^2y + 4Cy^3,$$

damit

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 4Ax^4 + 4Bx^2y^2 + 4Bx^2y^2 + 4Cy^4$$

$$= 4(Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4) = 4u$$

b) Es gilt

$$V = \frac{cT}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{c}{p}$$

$$T = \frac{1}{c}pV \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{c}$$

$$p = c\frac{T}{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial V} = -c\frac{T}{V^2}$$

Es folgt

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial V} = \frac{c}{p} \cdot \frac{V}{c} \cdot \left(-c\frac{T}{V^2}\right) = -\frac{cT}{pV} = -1$$