Lösungsvorschlag, 2. Übung, Mathe II f. BI, WIBI, MaWi, Geo SS2007

Aufgabe 4

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ -2\mathrm{I} \\ \\ -\mathrm{I} \end{array}$$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ -\mathrm{II} \end{array} \longrightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right|$$

Somit:

$x_4 = 1$

$x_3 = 5 - 5x_4 = 0$

$x_2 = 7 + x_3 - 6x_4 = 7 - 6 = 1$

$x_1 = 3 - x_2 - 3x_4 = 3 - 1 - 3 = -1$

Also Lösung des Gleichungssystems $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Anhand des Ergebnisses der Gauß-Elimination sieht man, daß Rang $A = 4$.

(G5) Definiert sind die folgenden Matrixprodukte:

AB, BA, BC, CA, CC

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 4 \\ 14 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 0 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(G6)

a) Es seien mit x_1, x_2, x_3 bzw. x_4 die Mengen bezeichnet, welche der Einkäufer von Legierung A, B, C bzw. D kauft.

Damit ergeben sich für eine Tonne Legierung folgende Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \quad \text{(Tonne Legierung)}$$

$$\frac{6}{100} x_1 + \frac{10}{100} x_2 + \frac{8}{100} x_3 + \frac{4}{100} x_4 = \frac{8}{100} \quad \text{(Magnesium-Anteil)}$$

$$\frac{7}{100} x_1 + \frac{3}{100} x_2 + \frac{13}{100} x_3 + \frac{1}{100} x_4 = \frac{6}{100} \quad \text{(Zink-Anteil)}$$

Löse das Gleichungssystem mit Gauß-Algorithmus

$$\left|\begin{array}{cccc|c|l} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 6 & 10 & 8 & 4 & 8 & -6\mathrm{I} \\ 7 & 3 & 13 & 1 & 6 & -7\mathrm{I} \end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{cccc|c|l} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 4 & 2 & -2 & 2 & :2 \\ 0 & -4 & 6 & -6 & -1 & +\mathrm{II} \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{cccc|c|} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & 1 \end{array}\right.$$

Wähle $x_4 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, frei, damit

$$x_3 = \frac{1}{8} + x_4 = \frac{1}{8} + \lambda \qquad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{7}{16}$$

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 = \frac{7}{16} - 2\lambda$$

Somit allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\vec{x} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da es sich bei $x_1, \dots, x_4$ um Mengen handelt, muß gelten $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$. Daher

$$x_4 = \lambda \geq 0 \qquad \text{(damit gilt auch } x_3 \geq 0\text{)}$$

$$x_1 = \frac{7}{16} - 2\lambda \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7}{32} \geq \lambda$$

Also muß λ die Bedingung

$$0 \leq \lambda \leq \frac{7}{32}$$

erfüllen, damit $x_1, \dots, x_4 \geq 0$.

b) Der ~~Pr~~ Preis pro Tonne ist

$$1000\,x_1 + 1500\,x_2 + 2000\,x_3 + 500\,x_4$$

$$= 1000\left(\frac{7}{16} - 2\lambda\right) + 1500 \cdot \frac{7}{16} + 2000\left(\frac{1}{8} + \lambda\right) + 500\lambda$$

$$= \frac{5375}{4} + 500\lambda$$

Der Preis ist offensichtlich minimal für $\lambda = 0$, also ist

$$\vec{x} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die preisgünstigste Lösung.