Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Berger
Dr. S. Moritz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

26./27.4.2007

Mathematik II für BI, WIBI, MaWi und GEO, Übung 1

Gruppenübung

G 1 Überprüfen Sie jeweils, ob die Vektoren linear unabhängig sind und ob sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

a)
$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -26 \\ 2 \\ 22 \end{pmatrix}$$

b)
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c)
$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d)
$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ -14 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Läßt sich der Vektor
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
als Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ schreiben?

G 2 Gegeben sind die Vektoren
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß die drei Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ senkrecht aufeinander stehen.

b) Geben Sie (mit dem in a) bestimmten Wert für α) einen Vektor $\vec{v}_4$ an, so daß $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden und $\vec{v}_4$ senkrecht auf $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ steht.

c) Berechnen Sie (mit dem in a) bestimmten Wert für α) die Längen von $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$.

G 3 Gegeben sei die Menge

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 + 2x_4 = 0 \right\}.$$

a) Zeigen Sie, daß die Menge U einen Unterraum des Vektorraums $\mathbb{R}^4$ bildet.

b) Bestimmen Sie die Dimension von U, und geben Sie eine Basis an.

c) Bildet auch die Menge

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 + 2x_4 = 1 \right\}.$$

einen Unterraum von $\mathbb{R}^4$?

Mathematik II für BI, WIBI, MaWi und GEO
Übung 1, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 1 Überprüfen Sie jeweils, ob die Vektoren linear unabhängig sind und ob sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

a)

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -26 \\ 2 \\ 22 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ -14 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Läßt sich der Vektor

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ schreiben?

a) *Zwei Vektoren sind linear abhängig, wenn einer ein Vielfaches des anderen ist. Für $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ ist das nicht der Fall, die beiden Vektoren sind also linear unabhängig. Sie bilden keine Basis des $\mathbb{R}^3$, da eine solche Basis aus drei Vektoren bestehen muß.*

b) *Die Gleichung $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = 0$ führt auf*

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
(1) & 3\alpha & - & 3\beta & - & 3\gamma & = & 0 \\
(2) & -1\alpha & + & 2\beta & + & 4\gamma & = & 0 \\
(3) & 2\alpha & - & 3\beta & + & 7\gamma & = & 0 \\
\\
(4) = (1) + 3(2) & & & 3\beta & + & 9\gamma & = & 0 \\
(5) = 3(3) - 2(1) & & & -3\beta & + & 27\gamma & = & 0 \\
\\
(6) = (4) + (5) & & & & & 36\gamma & = & 0
\end{array}$$

und damit $\gamma = \beta = \alpha = 0$. Die drei Vektoren sind linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

c) Die Vektoren sind linear abhängig, denn es gilt $\vec{w}_3 = \vec{w}_1 + 3\vec{w}_2$, und bilden somit auch keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

d) Vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind immer linear abhängig und können also keine Basis bilden.

Der Vektor $\vec{b}$ läßt sich als Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ schreiben, da diese eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

G 2 Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß die drei Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ senkrecht aufeinander stehen.

b) Geben Sie (mit dem in a) bestimmten Wert für α) einen Vektor $\vec{v}_4$ an, so daß $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden und $\vec{v}_4$ senkrecht auf $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ steht.

c) Berechnen Sie (mit dem in a) bestimmten Wert für α) die Längen von $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$.

a) Es gilt $v_1 \cdot v_2 = 0$ und $v_1 \cdot v_3 = 0$. Aus

$$v_2 \cdot v_3 = 14 - 10 + 2\alpha = 4 + 2\alpha \overset{!}{=} 0$$

folgt $\alpha = -2$.

b) Damit der Vektor $v_4 = (v_{41}, v_{42}, v_{43}, v_{44})^T$ orthogonal zu den anderen Vektoren ist, müssen die Bedingungen

$$\begin{aligned} v_4 \cdot v_1 &= v_{44} && \overset{!}{=} 0 \\ v_4 \cdot v_2 &= 14v_{41} - 5v_{42} + 2v_{43} && \overset{!}{=} 0 \\ v_4 \cdot v_3 &= v_{41} + 2v_{42} - 2v_{43} && \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

gelten. Mit $v_{44} = 0$ bleiben zwei Gleichungen für drei Unbekannte. Addition der zweiten und dritten Gleichung ergibt

$$15v_{41} - 3v_{42} \overset{!}{=} 0.$$

Nach Wahl von $v_{41} = 2$ folgt $v_{42} = 10$ und $v_{43} = 11$, also

$$v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) *Es gilt*

$$\begin{aligned}
\|v_1\| &= \sqrt{0+0+0+1} & & &= 1,\\
\|v_2\| &= \sqrt{196+25+4+0} &= \sqrt{225} &&= 15,\\
\|v_3\| &= \sqrt{1+4+4+0} &= \sqrt{9} &&= 3,\\
\|v_4\| &= \sqrt{4+100+121+0} &= \sqrt{225} &&= 15.
\end{aligned}$$

G 3 Gegeben sei die Menge

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{I\!R}^4 : \ x_1 + 2x_4 = 0 \right\}.$$

a) Zeigen Sie, daß die Menge U einen Unterraum des Vektorraums $\mathrm{I\!R}^4$ bildet.

b) Bestimmen Sie die Dimension von U, und geben Sie eine Basis an.

c) Bildet auch die Menge

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{I\!R}^4 : \ x_1 + 2x_4 = 1 \right\}.$$

einen Unterraum von $\mathrm{I\!R}^4$?

a) *Es muß für $\vec{u}, \vec{v} \in U$ und $\lambda \in \mathrm{I\!R}$ gezeigt werden*

$$\begin{aligned} &(1) \quad \vec{u} + \vec{v} \in U \\ &(2) \quad \lambda\vec{u} \in U. \end{aligned}$$

zu (1)

Seien $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in U$ *beliebig, d.h.* $u_1 + 2u_4 = v_1 + 2v_4 = 0$.

Es gilt $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \\ u_4 + v_4 \end{pmatrix}$ *und*

$$(u_1+v_1)+2(u_4+v_4) = u_1+v_1+2u_4+2v_4 = (u_1+2u_4)+(v_1+2v_4) = 0+0 = 0,$$

somit $\vec{u} + \vec{v} \in U$.

zu (2)

Seien $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \in U$ *beliebig, d.h.* $u_1 + 2u_4 = 0$, *und* $\lambda \in \mathrm{I\!R}$.

Es gilt $\lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \\ \lambda u_4 \end{pmatrix}$ *und*

$$(\lambda u_1) + 2(\lambda u_4) = \lambda u_1 + 2\lambda u_4 = \lambda(u_1 + 2u_4) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

somit $\lambda\vec{u} \in U$.
Also ist U *ein Unterraum des* $\mathbb{R}^4$.

b) *Bestimme eine Basis von* U.
Die Elemente $\vec{x}$ *der Menge* U *erfüllen die Gleichung*

$$x_1 + 2x_4 = 0.$$

Wähle $x_2 = r$, $x_3 = s$ *und* $x_4 = t$ *mit* $r, s, t \in \mathbb{R}$ *beliebig, dann* $x_1 = -2x_4 = -2t$.
Somit haben die Elemente von U *die allgemeine Form*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $r, s, t \in \mathbb{R}$.
Also ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von U, *und es gilt* $\dim U = 3$.

c) *Falls* V *ein Unterraum wäre, so müßte* $0 \in V$ *gelten. Es gilt jedoch* $0 + 2 \cdot 0 = 0 \neq 1$.
Also bildet V *keinen Unterraum von* $\mathbb{R}^4$.