Hausübung

H 4 Betrachten Sie das Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.
Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist dieses Gleichungssystem lösbar? Geben Sie im Falle der Lösbarkeit die gesamte Lösungsmenge in vektorieller Form an.
Welchen Rang hat die Matrix A?

Elementare Zeilenumformungen von (A, b) liefern:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 10 & \alpha \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 13 & 5 \\ 0 & 7 & 13 & \alpha+1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad rg(A) = rg(A, b) = 2 \quad \textit{genau für} \quad \alpha = 4$$

Also ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $\alpha = 4$.

Sei $\alpha = 4$. Dann ist $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ frei wählbar.

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{7}(5 - 13\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 - \frac{2}{7}(5 - 13\lambda) - 3\lambda = -\frac{3}{7} + \frac{5}{7}\lambda$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung des Gleichungssystems zu:

$$x = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Matrix A hat den Rang 2.

H 5 Berechnen Sie für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A^2, A^3 und A^4. Finden Sie eine Formel für A^n, $n \in \mathbb{N}$, und beweisen Sie diese mittels Induktion.

Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher kann man vermuten:

$$A^n := \begin{pmatrix} 1 & n & 1+2+\cdots+(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Induktionsanfang:
Die Vermutung ist wahr für $n = 1$.
Schluß von n auf $n+1$:
Sei die Vermutung wahr für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$A^{n+1} := AA^n =^{IV} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n(n-1)}{2}+n \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\frac{n(n-1)}{2} + n$ gleich $\frac{(n+1)n}{2}$ ist, ist die Behauptung damit bewiesen.

H 6 Zwischen dem Alter von Klaus, Rüdiger, Anna und Stefanie bestehen folgende Zusammenhänge: Addiert man das Alter von Klaus und Anna, so sind dieses 29 Jahre mehr als das Alter von Rüdiger. Stefanie ist genausoviele Jahre älter als Anna, wie Rüdiger jünger ist als Klaus. Addiert man das Alter von Rüdiger und Anna, so muß man 13 Jahre abziehen, um das Alter von Klaus zu erhalten.
Nun behauptet Anna, Klaus sei 7 Jahre alt, Stefanie dagegen behauptet, Klaus sei 9 Jahre alt.
Eine von beiden hat Recht. Wer? Berechnen Sie für den richtigen Fall das Alter von allen vier Personen.

Mit A, K, R bzw. S bezeichnen wir jeweils das Alter von Anna, Klaus, Rüdiger bzw. Stefanie. Damit ergeben sich folgende Gleichungen.

$$K + A = R + 29, \quad S - A = K - R, \quad R + A - 13 = K,$$

und dazu das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + K - R \quad &= 29 \\ -A - K + R + S &= 0 \\ A - K + R \quad &= 13. \end{aligned}$$

Anwendung des Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 29 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 29 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -16 \end{array}\right)$$

Somit $S = 29$, $R = \lambda \in \mathbb{R}$ *frei wählbar, damit*

$$K = 8 + R = 8 + \lambda, \quad A = 29 - K + R = 21.$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} A \\ K \\ R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \\ 0 \\ 29 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Fall: Anna hat Recht.
Damit

$$7 = K = 8 + \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad R = -1$$

Dies kann nicht sein, da Rüdiger kein negatives Alter haben kann.
2. Fall: Stefanie hat Recht.
Damit

$$9 = K = 8 + \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

Dies kann stimmen.
Stefanie hat Recht. Es ergibt sich somit, daß Anna 21, Klaus 9, Rüdiger 1 und Stefanie 29 Jahre alt sind.