G19:

a) $x^2 + 2xy = 0 \iff x(x+2y) = 0$

Das heißt $M_1 := \{(x,y) \mid x=0, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,y) \mid x = -2y\}$ ist die Lösungsmenge der ersten Gleichung. Lösungen des gesamten GLS müssen sowohl in M_1 liegen als auch die zweite Gleichung befriedigen.

Einsetzungen von Lösungen aus M_1 in die zweite Gleichg. ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Glg.}]{\text{Einsetzen in 2.}} y^2 = 0 \iff y = 0$$

Damit ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung des GLS.

$$\begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2. Glg.}]{\text{Einsetzen in}} y^2 - 6y^2 - 7y^2 = -12y^2 = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$$

Somit ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ die einzige Lösung des GLS.

b) Sei also der Startpunkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Wir setzen
$$f(x,y) := x^2 + 2xy$$
$$g(x,y) := y^2 + 3xy - \frac{7}{4}x^2.$$

Dann sind $f(0, \frac{1}{2}) = 0$ und $g(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

Weiterhin gelten:

$f_x(x,y) = 2x + 2y \quad \Rightarrow \quad f_x(0, \frac{1}{2}) = 1$

$f_y(x,y) = 2x \quad \Rightarrow \quad f_y(0, \frac{1}{2}) = 0$

$g_x(x,y) = 3y - \frac{7}{2}x \quad \Rightarrow \quad g_x(0, \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

$g_y(x,y) = 2y + 3x \quad \Rightarrow \quad g_y(0, \frac{1}{2}) = 1$

→

Es folgt:

$$f(x,y) \approx f(0,\tfrac{1}{2}) + f_x(0,\tfrac{1}{2}) \cdot x + f_y(0,\tfrac{1}{2})(y-\tfrac{1}{2})$$
$$= x = 0$$

$$g(x,y) \approx g(0,\tfrac{1}{2}) + g_x(0,\tfrac{1}{2})x + g_y(0,\tfrac{1}{2})(y-\tfrac{1}{2})$$
$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{2}x + (y-\tfrac{1}{2}) = 0$$

Aus $x=0$ folgt:

$$\Rightarrow \tfrac{1}{4} + (y-\tfrac{1}{2}) = 0 \Rightarrow y = \tfrac{1}{4}$$

Wir setzen $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ und iterieren erhält:

$$f(x,y) \approx f(0,\tfrac{1}{4}) + f_x(0,\tfrac{1}{4})x + f_y(0,\tfrac{1}{2})(y-\tfrac{1}{4})$$
$$= 0 + \tfrac{1}{2}x + 0 = 0$$

$$g(x,y) \approx g(0,\tfrac{1}{4}) + g_x(0,\tfrac{1}{4})x + g_y(0,\tfrac{1}{4})(y-\tfrac{1}{4})$$
$$= \tfrac{1}{16} + \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{2}(y-\tfrac{1}{4}) = 0$$

Aus $x=0$ folgt

$$\Rightarrow \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{2}(y-\tfrac{1}{4}) = 0 \Rightarrow y = \tfrac{1}{8}$$

Wir setzen $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ und iterieren erhält:

$$f(x,y) \approx 0 + \tfrac{1}{4}x = 0$$

$$g(x,y) \approx \tfrac{1}{64} + \tfrac{3}{8}x + \tfrac{1}{4}(y-\tfrac{1}{8}) = 0$$

Aus $x=0$ folgt:

$$\tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{4}(y-\tfrac{1}{8}) = 0 \Rightarrow y = \tfrac{1}{16}$$

Unsere approximierte Lösung nach 3 Iterationen lautet demnach $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

G20:

zu (a): Der Gradient von f lautet:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2+y^2) \\ 2y\cos(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

dieser existiert in allen Punkten $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$. Daher existiert die Ableitung in Richtung $(1,1)^T$ in allen Punkten $(x,y)^T$. Mit der Normierung $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ gilt

$$\partial_v f(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) \cdot v = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2+y^2) \\ 2y\cos(x^2+y^2) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\,(x+y)\cos(x^2+y^2).$$

zu (b): Der Vektor $(3,4,0)^T$ ist normiert $v = \frac{1}{5}(3,4,0)^T$. Der Gradient von g ist

$$\operatorname{grad} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} g_x(x,y,z) \\ g_y(x,y,z) \\ g_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2 \\ 9z^2 \end{pmatrix}.$$

Für die Richtungsableitung erhalten wir

$$\partial_v g(1,0,0) = \operatorname{grad} g(1,0,0) \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{14}{5}.$$

Die Gleichung der Tangentialebene an die Niveaufläche $g(x,y,z) = g(1,0,0)$ hat die Gestalt

$$\begin{aligned} & g_x(1,0,0)(x-1) + g_y(1,0,0)(y-0) + g_z(1,0,0)(z-0) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2(x-1) + 2(y-0) + 0(z-0) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x + y - 1 = 0. \end{aligned}$$

G21:

Das Volumen V des Behälters berechnet sich zu

$V(b,h,l) = b \cdot h \cdot l$

Für die gemessenen Werte b_0, h_0, l_0 gilt nach Voraussetzung:

$|\Delta b| = |b - b_0| = 0{,}1\,\text{cm}$

$|\Delta h| = |h - h_0| = 0{,}1\,\text{cm}$

$|\Delta l| = |l - l_0| = 0{,}1\,\text{cm}$.

Desweiteren gelten:

$\frac{\partial V}{\partial b}(b_0,h_0,l_0) = h_0 \cdot l_0 = 5\,\text{cm} \cdot 13\,\text{cm} = 65\,\text{cm}^2$

$\frac{\partial V}{\partial h}(b_0,h_0,l_0) = b_0 \cdot l_0 = 11\,\text{cm} \cdot 13\,\text{cm} = 143\,\text{cm}^2$

$$\frac{\partial V}{\partial l}(b_0, h_0, l_0) = b_0 \cdot h_0 = 11\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 55\,\text{cm}^2$$

Für die Fehlerschranke S gilt nach Voraussetzung (Hinweis):

$$S \approx (55\,\text{cm}^2 + 65\,\text{cm}^2 + 143\,\text{cm}^2) \cdot 0{,}1\,\text{cm}$$

$$= 263\,\text{cm}^2 \cdot 0{,}1\,\text{cm} = 26{,}3\,\text{cm}^3.$$

Das Volumen des Behälters beträgt mit den gemessenen Werten:

$$V(b_0, h_0, l_0) = b_0 \cdot h_0 \cdot l_0 = 11\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} \cdot 13\,\text{cm} = 715\,\text{cm}^3.$$

Der tatsächliche Wert des Volumens V liegt damit im Intervall

$$715\,\text{cm}^3 - 26{,}3\,\text{cm}^3 \le V \le 715\,\text{cm}^3 + 26{,}3\,\text{cm}^3.$$