Lösungen zu Übungsblatt 4, Gruppenübung

G10: Wegen

a) $f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1+y_1) + 2(x_2+y_2) \\ 3(x_1+y_1) + (x_2+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1+2x_2)+(y_1+y_2) \\ (3x_1+x_2)+(3y_1+y_2) \end{pmatrix}$

$= f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

und

$f\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + 2\lambda x_2 \\ 3\lambda x_1 + \lambda x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

ist f eine lineare Abb.

b) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) Die Matrix S für den Basiswechsel von B zur kanonischen Basis berechnet sich wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{e_1} + 1 \cdot \vec{e_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{e_1} + 1 \cdot \vec{e_2}$$

$$\Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Und warum ist das die gesuchte Matrix?

A ist die Matrix zu f bezüglich der kan. Basis.

A' — " — B.

Seien α_1, α_2 bzw. α_1', α_2' die Koordinaten eines Vektors $\vec{x}$ bezüglich der kan. Basis bzw. B.

Seien außerdem β_1, β_2 bzw. β_1', β_2' die Koordinaten eines Vektors $\vec{y}$ bezügl. der kan. Basis bzw. von B.

Dann folgt für die Abb. f bezüglich der kan. Basis:

$$f\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

und bezüglich der Basis B:

$$f\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \end{pmatrix}.$$

Mit der Transformationsmatrix S für den Basiswechsel gilt:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$A \cdot S \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \beta_2' \\ \beta_2' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S^{-1} A S \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_2' \\ \beta_2' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A' = S^{-1} A S.$$

weiter G10:

e)

$\det(A) = 1\cdot 1 - 2\cdot 3 = -5$

Mit dem Determinantenmultiplikationssatz gilt:

$$\det(A) = \det(S^{-1}A'S) = \det(S^{-1})\cdot\det(A')\cdot\det(S)$$
$$= (\det(S))^{-1}\cdot\det(A')\cdot\det(S) = \det(A')$$

$\Rightarrow \det(A') = -5$

G11:

a) $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) = \det(B)\cdot\det(A) = \det(BA)$

Aussage also falsch. (Beachten Sie, dass A, B $n\times n$-Matrizen sind)

b)

Nach Definition der Determinantenabbildung im Skript hängt $\Delta\begin{pmatrix}1 & b\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ linear von jeder Spalte ab, d.h.

es gilt

$$\det\begin{pmatrix}1 & b\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & b-a\\ 1 & -a\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 2+a\end{pmatrix}.$$

Aussage also richtig.

c) Es gilt $\det(n a_1 \;\; n a_2) = n^2 \det(a_1, a_2)$

Dann gilt also Gleichheit genau dann, wenn $(n-1) = n^2$ ist.

Das ist für $n = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i + \frac{1}{2}$ der Fall.

Da $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist die Bedingung für kein $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Somit ist die Aussage richtig.

d) Die zweite Determinante entsteht durch Vertauschen von Spalten und zwar:

1. Spalte mit der 2. Spalte
2. Spalte mit der 3. Spalte

$\vdots$

Spalte mit der n. ten Spalte

Es werden also genau $(n-1)$mal Spalten vertauscht.

Somit gilt:

$$\det(a_1\ a_2 \dots a_n) = (-1)^{n-1} \det(a_2\ a_3 \dots a_n\ a_1).$$

Ist n ungerade, so folgt $(-1)^{n-1} = 1$

Ist n gerade, so folgt $(-1)^{n-1} = (-1)$.

Somit ist die Aussage falsch.

G12:

Mit der Sarrus-Regel folgt

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 11 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2+0+0-(2-11+0) = 11.$$

Weiterhin gilt:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 11 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -2+0-1-(2+11) = -16$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1-11-(1+11+0) = -22$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2+0+0-(-2-1) = 5$$

Daraus folgt:

$x_1 = \frac{-16}{11}$. $\quad x_2 = \frac{-22}{11} = -2 \quad x_3 = \frac{5}{11}$