G7:

a) Die inverse Matrix von A berechnet sich wie folgt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Es folgt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = A^{-1} \Rightarrow A^2 = E \Rightarrow (A^3)^{-1} = A^{-1} = A$$

Die inverse Matrix von B berechnet sich wie folgt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\mathrm{I} \\ \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +\frac{1}{2}\mathrm{II} \\ \\ +\frac{1}{4}\mathrm{II} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{2}{9}\mathrm{III} \\ -\frac{4}{9}\mathrm{III} \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & -4 & 0 & -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-\frac{1}{4}) \\ \cdot(\frac{4}{9}) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Es folgt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(oder Permutationsmatrix A als Argumentation)

b) Aus $Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Aus $Bx = b \Rightarrow x = B^{-1}b = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$

Aus $(A^2x = b \Leftrightarrow Ex = b) \Rightarrow x = b$

Aus $(AB)x = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow x = 0_{\mathbb{R}^3}$

Aus $(BA)x = b \Rightarrow x = (BA)^{-1}b = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$$

G8:

a) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 2x + 3y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$

[Alternative:

$h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot 1 \qquad h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 3 \cdot 1$

weil $\{1\}$ Basis von $\mathbb{R}$ ist

$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$

$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$]

b)

$f \circ g$: Zuerst wird $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ um $90°$ um den Ursprung gedreht, also zu $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann erfolgt Projektion auf die y-Achse, also $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$g \circ f$: Zuerst wird $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf die y-Achse projiziert, also $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dann Drehung um $90°$, also entsteht $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Offenbar ist die Reihenfolge der Anwendung von f und g auf einen Vektor nicht egal.

c) $(h \circ f \circ g)(x) = (h \circ f)(g(x)) = (h \circ f)(Bx) = h(f(Bx)) = h(A(Bx))$
$= C(A(Bx))$

Also ist

$$D = CAB = (2 \quad 3) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (3 \quad 0)$$

$\Rightarrow \quad D \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \qquad$ und $\qquad (h \circ f \circ g)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$

G9:

a) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann sind $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ linear unabhängig, denn aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt mit dem Gaußalgorithmus

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ \cdot(-1) \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -\mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +\mathrm{I} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $\mathbb{R}^3$ die Dimension 3 besitzt, sind $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ maximal linear unabhängig und bilden deswegen eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

b) Zuerst bestimmen wir die Koordinaten von $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ bezüglich der Basis E.

$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sollen nun die Koordinaten $\beta_1, \beta_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ des Vektors $\vec{x}_B$ zur Basis B, transformiert werden in die Koordinaten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des Vektors $\vec{x}_E$ zur Basis E, so bestimmen wir:

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2 + \beta_3 \vec{b}_3 \\
&= \beta_1 \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) + \beta_2 \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3\right) + \beta_3 \left(2\vec{e}_1\right) \\
&= (\beta_1 + \beta_2)\vec{e}_1 + (\beta_1 + \beta_2 + 0\beta_3)\vec{e}_2 + (-\beta_2)\vec{e}_3 + 2\beta_3 \vec{e}_1
\end{aligned}$$

Dann sind die Koeffizienten der $\vec{e}_i$ $i \in \{1,2,3\}$ die gesuchten Koordinaten α_i. Also ergibt sich die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{denn}$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 \\ \beta_1 + \beta_2 + 0\beta_3 \\ -\beta_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich B bereits bei der Bestimmung der Koordinaten von $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ siehe vorherige Seite.

c) Die Koordinaten von $\vec{x}_E$ zur kanonischen Basis sind offenbar $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ und $\alpha_3 = 3$.
Dann sind $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$