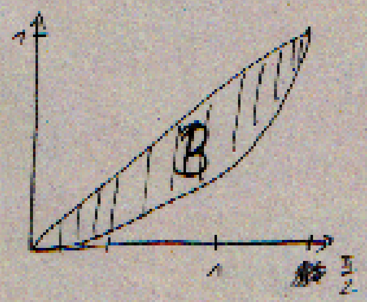
A 31:



Zunächst bestimmen wir den Flächeninhalt A der Fläche B.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{4x^2}{\pi^2}}^{\sin x} 1 \, dy \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[y \Big]_{\frac{4x^2}{\pi^2}}^{\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{4x^2}{\pi^2} \right) dx = \left[-\cos x - \frac{4}{3\pi^2} x^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{6}$$

Damit berechnen wir die Koordinaten des Schwerpunkts $S = (x_S, y_S)$:

$$x_S = \frac{1}{A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{4x^2}{\pi^2}}^{\sin x} x \, dy \, dx = \frac{1}{A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \sin x - \frac{4}{\pi^2} x^3 \right) dx$$

$$= \frac{1}{A} \left(\left[-\frac{x^4}{\pi^2} \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \Big[-x \cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{A} \left(1 - \frac{\pi^2}{16} \right) = \frac{1 - \frac{\pi^2}{16}}{1 - \frac{\pi}{6}}$$

$$y_s = \frac{1}{A}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{4x^2}{\pi^2}}^{\sin x} y\,dy\,dx = \frac{1}{2A}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x - \frac{16}{\pi^4}x^4\right)dx$$

$$= \frac{1}{2A}\left[\frac{x}{2} - \frac{\cos x\,\sin x}{2} - \frac{16}{5\pi^4}x^5\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2A}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{16}{5\pi^4}\cdot\frac{\pi^5}{32}\right] = \frac{3\pi}{40A} = \frac{3}{40}\cdot\frac{\pi}{\left(1-\frac{\pi}{6}\right)}$$

H52:

Gegeben sind das Vektorfeld

$\vec{v}(x,y,z) = (x, z, cy+z)^T \qquad c \in \mathbb{R}$ und die Kurve

$K: \vec{x}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ für $0 \le t \le \pi$.

$$\int_K \vec{v}\, d\vec{x} = \int_0^\pi \vec{v}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\, dt$$

$$= \int_0^\pi \begin{pmatrix} \cos t \\ t \\ c\sin t + t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^\pi (-\cos t \sin t + t\cos t + c\sin t + t)\, dt$$

$$= \left[-\frac{\sin^2 t}{2} + \cos t + t\sin t - c\cos t + \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi$$

$$= -1 + c + \frac{\pi^2}{2} - (1-c) = -2 + 2c + \frac{\pi^2}{2}$$

Außerdem gilt

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} e_x & \frac{\partial}{\partial x} & x \\ e_y & \frac{\partial}{\partial y} & z \\ e_z & \frac{\partial}{\partial z} & cy+z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} c-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff c = 1$$

$\Rightarrow$ Integral ist wegunabhängig, falls $c = 1$.

Hausübung, H33, Lösung

Die Funktion

$$z = f(x,y) = \cosh x, \quad -2 \le x \le 2, \quad -10 \le y \le 10$$

beschreibt ein Flächenstück F im $\mathbb{R}^3$.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von F.

b) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint_F g \, dF$ für die Funktion $g(x,y,z) = \frac{xy}{z}$.

a) Zunächst zur Parametrisierung von F.
Setze $u := x$ und $v := y$, dann folgt:

$$\varphi(u,v) = (u, v, \cosh u)^T \quad \text{mit} \quad (u,v) \in B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le u \le 2, \ -10 \le v \le 10\}$$

Wir bestimmen $|\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)|$:

$$\varphi_u(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sinh u \end{pmatrix}, \quad \varphi_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v) = \begin{pmatrix} -\sinh u \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)| = \sqrt{\sinh^2 u + 1} = \cosh u.$$

Berechnung des Flächeninhalts von F:

$$I(F) = \iint_F dF = \iint_B |\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)| \, du\,dv = \int_{-10}^{10} \int_{-2}^{2} \cosh u \, du\,dv$$

$$= \int_{-10}^{10} [\sinh u]_{-2}^{2} \, dv = \int_{-10}^{10} (e^2 - e^{-2}) \, dv = (e^2 - e^{-2}) v \Big|_{-10}^{10} = 20(e^2 - e^{-2})$$

b) Mit $g(\varphi(u,v)) = \frac{uv}{\cosh u}$ erhalten wir

$$\iint_F g \, dF = \iint_B g(\varphi(u,v)) \, |\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)| \, du\,dv = \int_{-10}^{10} \int_{-2}^{2} \frac{uv}{\cosh u} \cosh u \, du\,dv$$

$$= \int_{-10}^{10} \int_{-2}^{2} uv \, du\,dv = \int_{-10}^{10} \left[\frac{1}{2} u^2 v\right]_{-2}^{2} dv = \int_{-10}^{10} 0 \, dv = 0.$$