a)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \cos(x) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} + 2x$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 1 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = xe^{xy}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = 2y^2x \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = y\cos(x)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = 2x^2y \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = \sin(x)$$

b) Alle partiellen Ableitungen in a) sind stetig, als konstante Funktionen, trigonometrische Funktionen, Polynome und Produkte derselben.
Damit ist f stetig, partiell differenzierbar und mit Satz 7.13 a) folgt, f ist linear approximierbar.
Somit ~~exist.~~ die Jacobi-Matrix $J_f(x_0,y_0)$ und die Jacobi-Matrix $J_g(x_0,y_0)$ mit

$$J_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \cos(x_0) & 1 \\ 0 & 1 \\ y_0e^{x_0y_0} + 2x_0 & x_0e^{x_0y_0} \end{pmatrix}$$

$$J_g(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2y_0^2x_0 & 2x_0^2y_0 \\ y_0\cos(x_0) & \sin(x_0) \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$

Mit der Kettenregel Satz 7.14. folgt:

$$J_{f\circ g}(x_0, y_0) = J_f(g(x_0, y_0))\, J_g(x_0, y_0)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(x_0^2 y_0^2) & 1 \\ 0 & 1 \\ y_0 \sin(x_0) e^{x_0^2 y_0^2 \sin(x_0)} + 2x_0^2 y_0^2 & x_0^2 y_0^2 e^{x_0^2 y_0^2 \sin(x_0)} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 2y_0^2 x_0 & 2x_0^2 y_0 \\ y_0 \cos(x_0) & \sin(x_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2y_0^2 x_0 \cos(x_0^2 y_0^2) + y_0 \cos(x_0) & 2x_0^2 y_0 \cos(x_0^2 y_0^2) + \sin(x_0) \\ y_0 \cos(x_0) & \sin(x_0) \\ 2y_0^3 x_0 \sin(x_0) e^{x_0^2 y_0^2 \sin(x_0)} + 4y_0^4 x_0^3 + x_0^2 y_0^2 e^{x_0^2 y_0^2 \sin(x_0)}) \cdot \cos(x_0) & 2x_0^2 y_0^3 \sin(x_0) e^{x_0^2 y_0^2 \sin(x_0)} + 4x_0^2 y_0^3 + x_0^2 y_0^2 e^{x_0^2 y_0^2 \sin(x_0)}) \cdot \sin(x_0) \end{pmatrix}$$

A23:

a) $f(e,1) = 0$

$$f_y(x,y) = x + \ln x \, e^y$$

Somit ist $f_y(e,1) = e + \ln(e) \cdot e = 2e \neq 0$.
Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es also eine geeignete Umgebung von $\binom{e}{1}$, in der sich die Funktion f nach $y = g(x)$ auflösen lässt.

b) $f_x(x,y) = y + \frac{e^y}{x} - 2$

$$\Rightarrow g'(e) = -\frac{f_x(e,1)}{f_y(e,1)} = -\frac{1+1-2}{2e} = 0$$

a) $g(x,y) = x + y^2 = 0$. Es folgt $x = -y^2$. Eingesetzt in f ergibt das $h(y) = f\begin{pmatrix}-y^2\\ y\end{pmatrix} = -y^2 + (y+1) = -y^2 + y + 1$, wobei $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine „normale" Funktion ist, deren Minimum wir suchen.

$h'(y) = -2y + 1$. $h'(y) = 0 \iff -2y + 1 = 0$

Der stationäre Punkt von h ist $y_0 = +\frac{1}{2}$

$h''(y_0) = -2$

Somit ist $y_0 = \frac{1}{2}$ ein Maximum von h.

Die Funktion f nimmt also für $g(x,y) = 0$ ihr Maximum im Punkt $\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ an.

b) Mit der Kettenregel Satz 7.6. gilt:

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = (\operatorname{grad} f(x(t)))^T \cdot x'(t)$$

Es ist

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_x\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\ f_y\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$ Somit gilt

$$\operatorname{grad} f\left(\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

Außerdem ist

$$x'(t) = \begin{pmatrix}-2t\\ 1\end{pmatrix}$$

Insgesamt folgt also

$\frac{d}{dt} f(x(t)) = -2t + 1$. Ab hier erfolgt das Feststellen für Extremwerte wie in Aufgabenteil a).

c) f ist stetig differenzierbar und g ist stetig differenzierbar. 36

Angenommen es existiert ein $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, das unser Problem maximiert, dann gibt es nach Satz 7.12. ein λ mit

$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \operatorname{grad} g\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0$, wobei $\operatorname{grad}(g\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gelten muß. Wegen

$$\operatorname{grad}(g\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2y_0 \end{pmatrix}$$ ist die Bedingung erfüllt.

Weiterhin ist

$$f_x\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 1 \qquad f_y\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 1 .$$

Für den Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ muß also gelten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Gleichung folgt,

$\lambda = -1$. Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt das

$$1 - 2y_0 = 0 \quad \rightarrow \quad y_0 = \frac{1}{2} .$$

Mögliche Kandidaten für Maxima sind also alle

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Wegen $g(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow t + \frac{1}{4} = 0$, also $t = -\frac{1}{4}$

Es bleibt nur der Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ als mögliches Maximum übrig.