Die Mantelfläche M des Behälters berechnet sich zu:

$M(b,h) = b \cdot h$ und das Volumen zu $V(r,h) = \pi r^2 \cdot h$.

Gegeben sind die Meßwerte $b_0 = 20\,cm$, $h_0 = 5\,cm$. Der aus dem Umfang b_0 berechnete Radius ist $r_0 = \frac{b_0}{2\pi} = \frac{10}{\pi}\,cm$.

Somit ergeben sich für die Mantelfläche und das Volumen die Werte:

$$M(b_0,h_0) = b_0 \cdot h_0 = 100\ cm^2$$

$$V(r_0,h_0) = \pi r_0^2 \, h_0 = \pi \cdot \frac{100}{\pi^2} \, 5\ cm^3 = \frac{500}{\pi}\ cm^3 .$$

Die Meßfehler sind nach Voraussetzung:

$\Delta b = |b - b_0| = 0{,}2\ cm$

$\Delta h = |h - h_0| = 0{,}2\ cm$.

Für den Radius r berechnen wir eine ungefähre Fehlerschranke S_r:

Es gilt $r(b) = \frac{b}{2\pi}$, also $\frac{\partial r}{\partial b}(b_0) = \frac{1}{2\pi}$.

Somit ist $S_r \approx \frac{1}{2\pi} \cdot 0{,}2\ cm = \frac{1}{10\pi}\ cm$.

Für die Fehlerschranke S_M, S_V von Mantelfläche und Volumen ergibt sich:

$$S_M \approx \frac{\partial M}{\partial b}(b_0,h_0) \cdot 0{,}2\,cm + \frac{\partial M}{\partial h}(b_0,h_0) \cdot 0{,}2\,cm =$$

$$= (h_0 + b_0) \cdot 0{,}2\ cm = 25\,cm \cdot 0{,}2\,cm = 5\ cm^2 .$$

$$S_V \approx \frac{\partial V}{\partial r}(r_0,h_0) \cdot S_r + \frac{\partial V}{\partial h}(r_0,h_0) \cdot 0{,}2\,cm$$

$$= 2\pi r_0 h_0 \cdot S_r + \pi r_0^2 \cdot 0{,}2\,cm$$

$$= 2\pi \cdot \frac{10}{\pi} \cdot 5 \cdot \frac{1}{10\pi}\ cm^3 + \pi \, \frac{100}{\pi^2} \cdot 0{,}2\ cm^3 = \frac{10}{\pi}\,cm^3 + \frac{20}{\pi}\,cm^3$$

$$= \frac{30}{\pi}\,cm^3$$

→

Somit liegt der wahre Wert M der Mantelfläche und der wahre Wert V des Volumens im folgenden Intervallen.

$$M \in \left[100\,cm^2 - 5\,cm^2,\ 100\,cm^2 + 5\,cm^2\right] = \left[95\,cm^2,\ 105\,cm^2\right].$$

$$V \in \left[\frac{500}{\pi}\,cm^3 - \frac{30}{\pi}\,cm^3,\ \frac{500}{\pi}\,cm^3 + \frac{30}{\pi}\,cm^3\right] = \left[\frac{470}{\pi}\,cm^3,\ \frac{530}{\pi}\,cm^3\right]$$

H20:

a)
$$f_x\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = 2x_0 \qquad f_y\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = 2y_0$$

b) Mit Satz 7.5 berechnet sich der Anstieg von f an der Stelle $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^2$ wie folgt:

$$\partial_v \left(f\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right) = \left(\operatorname{grad}\left(f\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right)\right)^T \cdot \vec{v} = f_x\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\cdot v_1 + f_y\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\cdot v_2$$

$$= 2x_0 v_1 + 2y_0 v_2$$

Für einen Vektor v, der senkrecht auf dem Gradienten steht, gilt somit

$$2x_0 v_1 + 2y_0 v_2 = 0.$$

bei $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Nach Voraussetzg. ist $v_1^* = 1$. Somit folgt $v_2^* = -\frac{x_0}{y_0}$.

Normierg. ergibt $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{v_1^*}{\sqrt{v_1^{*2}+v_2^{*2}}}\\ \frac{v_2^*}{\sqrt{v_1^{*2}+v_2^{*2}}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\\ -\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\end{pmatrix}$

Für alle $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

21

) Es sind

$$f_x(x,y) = 2y^2\cos(2xy) + 1 \Rightarrow f_x(2,0) = 1$$

$$f_y(x,y) = \sin(2xy) + 2xy\cos(2xy) \Rightarrow f_y(2,0) = 0$$

$$g_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} \Rightarrow g_x(2,0) = 1$$

$$g_y(x,y) = x^2 e^{xy} \Rightarrow g_y(2,0) = 4$$

Für das Newton-Verfahren mit Startpunkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich somit als erste Näherungslösung:

$$(x_1 - x_0) = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$(y_1 - y_0) = \frac{1}{4} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -2 + x_0 = -2 + 2 = 0$$

$$y_1 = 0 + y_0 = 0 + 0 = 0$$

Offensichtlich ist der Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung des nichtlinearen GLSs und somit erübrigen sich weitere Iterationen.

b) $f\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -1$

$g\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -1$

Weiterhin folgen:

$f_x\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = 1$

$f_y\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = 0$

$g_x\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = 1$

$g_y\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = 1$

Daraus ergeben sich folgende Näherungen:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \approx (-1) + 1(x+1) + 0 = 0$$

$$g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \approx (-1) + (x+1) + y = 0$$

Somit folgen

$x = 0$

und $y = 0$

Wir haben also nochmals diese Lösung des GLSs gefunden.