Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Berger
Dr. S. Moritz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

26./27.4.2007

Mathematik II für BI, WIBI, MaWi und GEO, Übung 1

Gruppenübung

G 1 Überprüfen Sie jeweils, ob die Vektoren linear unabhängig sind und ob sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

a)
$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -26 \\ 2 \\ 22 \end{pmatrix}$$

b)
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c)
$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d)
$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ -14 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Läßt sich der Vektor
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
als Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ schreiben?

G 2 Gegeben sind die Vektoren
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß die drei Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ senkrecht aufeinander stehen.

b) Geben Sie (mit dem in a) bestimmten Wert für α) einen Vektor $\vec{v}_4$ an, so daß $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden und $\vec{v}_4$ senkrecht auf $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ steht.

c) Berechnen Sie (mit dem in a) bestimmten Wert für α) die Längen von $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$.

G 3 Gegeben sei die Menge

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + 2x_4 = 0 \right\}.$$

a) Zeigen Sie, daß die Menge U einen Unterraum des Vektorraums $\mathbb{R}^4$ bildet.

b) Bestimmen Sie die Dimension von U, und geben Sie eine Basis an.

c) Bildet auch die Menge

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + 2x_4 = 1 \right\}.$$

einen Unterraum von $\mathbb{R}^4$?

Hausübung

H 1 Untersuchen Sie jeweils, ob die folgenden Vektoren eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ bilden.

a)

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

H 2 Gegeben sind die drei Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3c \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}.$$

a) Für welche $c \in \mathbb{R}$ hat $\vec{v}_3$ die Länge 13?

b) Für welche $c \in \mathbb{R}$ sind $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ orthogonal zueinander?

c) Für welche $c \in \mathbb{R}$ bilden $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

H 3 Gegeben seien die Mengen

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \right\}, \quad U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^{3} i \cdot x_i^2 = 0 \right\}$$

und $U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^{3} i \cdot (x_i + 1) = 6 \right\}.$

Überprüfen Sie, ob U_1, U_2 bzw. U_3 einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ bildet.
Bestimmen Sie gegebenenfalls die Dimension und geben Sie eine Basis an.