Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Berger
Dr. S. Moritz
SS 2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6.6.2007

Mathematik II für BI, WIBI, MaWi und GEO
Test 1

Bitte in Druckschrift deutlich lesbar ausfüllen:

Name: .... Matrikelnummer: ....

Vorname: .... Studienfach: ....

Fachsemester: .... Übungsgruppe: ....

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
Maximale Punktzahl	10	10	10	30
Erreichte Punktzahl				

Bitte **alle** Blätter mit **Namen** versehen, fortlaufend numerieren und am Schluß der Klausur in das in der Mitte einmal gefaltete Aufgabenblatt legen. Das Schreiben mit Bleistift ist nicht erlaubt.

Geben Sie bitte **sämtliche Zwischenergebnisse** bei der Lösung der Aufgaben an, andernfalls muß mit Punktabzug gerechnet werden.

Hilfsmittel: Zugelassen sind zwei selbst handschriftlich beschriebene DIN-A4-Seiten.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A und benutzen Sie Ihr Ergebnis, um zu entscheiden, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

b) Berechnen Sie mit dem Gaussalgorithmus die Lösung des Gleichungssystems für alle α, für die es nicht eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sind die Abbildungen $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

und

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x+y \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass h eine lineare Abbildung ist und dass es sich bei g nicht um eine lineare Abbildung handelt.

b) Bestimmen Sie die Matrix A der linearen Abbildung h bezüglich der Standardbasis E .

c) Zeigen Sie, dass $B := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

d) Bestimmen Sie die Matrix A' der linearen Abbildung h bezüglich der Basis B.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sei eine Quadrik durch die Gleichung

$$7x^2 + 2\sqrt{5}xy + 3y^2 + 2x - 2\sqrt{5}y = 0.$$

a) Führen Sie eine Hauptachsentransformation durch und bestimmen Sie den Typ der Quadrik.

b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt in x-y-Koordinaten.

c) Skizzieren Sie die Quadrik im x-y-Koordinatensystem.