Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Berger
Dr. S. Moritz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

28./29.6./2.7.2007

Mathematik II für BI, WIBI, MaWi und GEO, Übung 10

Gruppenübung

G 28 a) Berechnen Sie
$$\int\int\int_B xyz \; dx \; dy \; dz,$$
wobei $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \; x,y,z \geq 0, \; x \leq 1, \; y+x \leq 1, \; z+x \leq 2\}$.

b) Berechnen Sie das Dreifachintegral
$$\int\int\int_G z \; dx \; dy \; dz$$
über dem Bereich $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \; 0 \leq z \leq 1, \; |x| \leq z, \; |y| \leq \sqrt{z^2 - x^2}\}$.

G 29 a) Bestimmen Sie mittels Polarkoordinaten den Wert des Integrals
$$I(R) := \int\int_{B_R} e^{-((x-1)^2+y^2)} \; dx \; dy$$
in Abhängigkeit von $R > 0$. Dabei ist das Integrationsgebiet B_R die Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(1,0)$ und Radius R, also $B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; (x-1)^2 + y^2 \leq R^2\}$.
Berechnen Sie ferner
$$\lim_{R\to\infty} I(R).$$

b) Bestimmen Sie das Volumen, welches innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 = 4$, über der Ebene $z = 0$ und unterhalb des Paraboloids $(x+2)^2 + y^2 = 4z$ liegt mittels Zylinderkoordinaten.

G 30 Eine inhomogene Platte B sei durch die Kurven $y = x^2 + 2$, $y = 3x^2$ und $x = 0$ in der rechten Halbebene ($x \geq 0$) beschrieben. Mit $\delta(x,y) = 2x^2y$ sei die Dichte der Platte im Punkt $(x,y) \in B$ bezeichnet. Berechnen Sie die Masse M und den Schwerpunkt $S = (x_S, y_S)$ der Platte.

Hausübung

H 28 Sei $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, \; z \leq 0\}$. Berechnen Sie das Integral
$$\int\int\int_G \frac{1}{x^2+y^2+z^2+1} \; dx \; dy \; dz$$
mittels Kugelkoordinaten.

H 29 Seien $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \; \frac{1}{2} \leq z \leq 1\}$ und $\delta(x,y,z) = z$ die Dichte von K. Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt von K.

H 30 Berechnen Sie das Volumen, die Masse und den Schwerpunkt des Körpers $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \; 0 \leq z\}$ mit der konstanten Dichte $\delta(x,y,z) = 2$.

Mathematik II für BI, WIBI, MaWi und GEO
Übung 10, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 28 a) Berechnen Sie

$$\int\int\int_B xyz\ dx\ dy\ dz,$$

wobei $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x,y,z \geq 0,\ x \leq 1,\ y+x \leq 1,\ z+x \leq 2\}$.

b) Berechnen Sie das Dreifachintegral

$$\int\int\int_G z\ dx\ dy\ dz$$

über dem Bereich $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \leq z \leq 1,\ |x| \leq z,\ |y| \leq \sqrt{z^2 - x^2}\}$.

G 29 a) Bestimmen Sie mittels Polarkoordinaten den Wert des Integrals

$$I(R) := \int\int_{B_R} e^{-((x-1)^2+y^2)}\ dx\ dy$$

in Abhängigkeit von $R > 0$. Dabei ist das Integrationsgebiet B_R die Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(1,0)$ und Radius R, also $B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x-1)^2 + y^2 \leq R^2\}$.
Berechnen Sie ferner

$$\lim_{R\to\infty} I(R).$$

b) Bestimmen Sie das Volumen, welches innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 = 4$, über der Ebene $z = 0$ und unterhalb des Paraboloids $(x+2)^2 + y^2 = 4z$ liegt mittels Zylinderkoordinaten.

G 30 Eine inhomogene Platte B sei durch die Kurven $y = x^2 + 2$, $y = 3x^2$ und $x = 0$ in der rechten Halbebene $(x \geq 0)$ beschrieben. Mit $\delta(x,y) = 2x^2y$ sei die Dichte der Platte im Punkt $(x,y) \in B$ bezeichnet. Berechnen Sie die Masse M und den Schwerpunkt $S = (x_S, y_S)$ der Platte.

Hausübung

H 28 Sei $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3,\ z \leq 0\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int\int\int_G \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}\ dx\ dy\ dz$$

mittels Kugelkoordinaten.

H 29 Seien $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ \frac{1}{2} \leq z \leq 1\}$ und $\delta(x, y, z) = z$ die Dichte von K. Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt von K.

H 30 Berechnen Sie das Volumen, die Masse und den Schwerpunkt des Körpers $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ 0 \leq z\}$ mit der konstanten Dichte $\delta(x, y, z) = 2$.