Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Berger
Dr.S. Moritz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14./15./18.6.2007

Mathematik II für BI, WIBI, MaWi und GEO, Übung 8

Gruppenübung

G 22 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit

$$f(x, y) = \sin(x) + \cos(xy)$$

.

a) Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion f.

b) Begründen Sie die Existenz der Hesse-Matrix $M_f(x_0, y_0)$ in jedem Punkt (x_0, y_0) und bestimmen Sie diese.

c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f.

d) Entscheiden Sie mit Hilfe der Hesse-Matrix, ob es sich bei den stationären Punkten um Sattelpunkte oder Extrema handelt. Benutzen Sie die Kriterien auf Seite 117 im Skript.

G 23 Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \sin^2 y + x^3 - 1$.

a) Kann man für $(\sqrt[3]{0.5}, \pi/4)$ die Gleichung $g(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. gibt es eine geeignete Umgebung von $\sqrt[3]{0.5}$, so dass in dieser Umgebung aus $g(x, y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion f mit $y = f(x)$ folgt?

b) Für welche (x_0, y_0) mit $g(x_0, y_0) = 0$ kann man die Gleichung $g(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. für welche (x_0, y_0) gibt es eine geeignete Umgebung von x_0, so dass in dieser Umgebung aus $g(x, y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion f mit $y = f(x)$ folgt?

c) Berechnen Sie $f'(\sqrt[3]{0.5})$.

G 24 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Ist f stetig, existieren alle partiellen Ableitungen von f und besitzt f an der Stelle $a \in \mathbb{R}^2$ ein globales Minimum, dann gilt $grad(f(a)) = 0$.

b) Besitzt f keine partiellen Ableitungen, dann existieren keine Extremwerte von f.

c) Hat f ein globales Minimum an der Stelle a, dann ist die Hesse-Matrix positiv definit.

d) Ist f zweimal stetig differenzierbar im Punkt $a \in \mathbb{R}^2$, sind die Eigenwerte der Hesse-Matrix im Punkt a positiv und gilt $grad(f(a)) = 0$, dann ist $f(a)$ ein lokales Minimum.

e) Existieren alle partiellen Ableitungen von f und sind diese stetig, so ist f total differenzierbar.

Hausübung

H 22 Betrachten Sie die Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x) + y \\ y \\ e^{xy} + x^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und } g(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y^2 \\ y\sin(x) \end{pmatrix}$$

.

a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen von f und g.

b) Begründen Sie die Existenz der Jacobi-Matrizen von f und g und bestimmen Sie diese.

c) Bestimmen Sie mit der Kettenregel Satz 7.14. die Jacobi-Matrix von $f \circ g$.

H 23 Gegeben sei die Gleichung

$$f(x,y) := xy + \ln(x)e^y - 2x = 0$$

.

a) Kann man für $(e,1)^T$ die Gleichung $f(x,y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. gibt es eine geeignete Umgebung von $(e,1)$, so dass in dieser Umgebung aus $f(x,y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion g mit $y = g(x)$ folgt?

b) Bestimmen Sie $g'(e)$.

H 24 Gegeben sind die Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x + y + 1 \qquad \text{und } g(x,y) = x + y^2$$

.

Wir wollen das Maximum von f auf der Menge $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ g(x,y) = 0\}$ bestimmen und zwar auf dreierlei verschiedene Arten.

a) Lösen Sie die Gleichung $g(x,y) = 0$ nach x auf und setzen Sie ihre Lösung in f ein. Bestimmen Sie das Maximum der resultierenden Funktion.

b) Eine Parametrisierung der Menge M ist die Kurve $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$x(t) = (-t^2, t)$$

.

Berechnen Sie $\frac{\partial f(x(t))}{\partial t}$ mit der Kettenregel aus Satz 7.6. Bestimmen Sie dann das Maximum von $f(x(t))$.

c) Bestimmen Sie mit dem Lagrange-Ansatz mögliche Kandidaten für ein Minimum von f auf der Menge M.