



Mathematik II für BI, WIBI, MaWi und GEO, Übung 7

Gruppenübung

G 19 Gegeben ist das folgende nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x^2 + 2xy &= 0 \\ y^2 + 3xy - \frac{7}{4}x^2 &= 0\end{aligned}$$

- Berechnen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems, indem Sie die Lösungen der ersten Gleichung bestimmen und in die zweite Gleichung einsetzen.
- Berechnen Sie nun mit dem Newtonverfahren eine angenäherte Lösung des Gleichungssystems, indem Sie drei Iterationen durchführen. Beginnen Sie mit dem Startpunkt $(x_0, y_0)^T := (0, \frac{1}{2})^T$.

G 20 a) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f(x, y) := \sin(x^2 + y^2)$ in Richtung $(1, 1)^T$ in allen Punkten $(x, y)^T$, in denen dies möglich ist.

- Berechnen Sie die Richtungsableitung von $g(x, y, z) := x^2 + 2y + 3z^3 + 1$ in Richtung $(3, 4, 0)^T$ im Punkt $(1, 0, 0)^T$.

Geben Sie die Tangentialebene an den Graphen von g im Punkt $(1, 0, 0)^T$ an.

G 21 Gegeben ist ein quaderförmiger Behälter für den folgende gemessene Werte vorliegen: Breite $b = 11$ cm, Höhe $h = 5$ cm, Länge $l = 13$ cm. Das Volumen des Behälters soll berechnet werden. Dabei ist bekannt, dass man bei jedem Messwert von einem Fehler von maximal 1mm ausgehen muss. Berechnen Sie das Volumen des Behälters. Schätzen Sie den Fehler für das berechnete Volumen mit folgendem Hinweis.

Hinweis: Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Werden statt der wahren Werte $x = (x_1, x_2, x_3)$ die Näherungswerte $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ gemessen, dann belasten die Messfehler $|\Delta x_i| = |x_i - x_{0,i}|$ den Funktionswert mit dem Fehler

$$|\Delta f(x)| = |f(x) - f(x_0)| = |\text{grad} f(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)| \leq \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right| |\Delta x_i| + o(|x - x_0|).$$

Sind für die gemessenen Werte Fehlerschranken $|\Delta x_i| \leq s_i$ bekannt, so erhält man eine ungefähre Fehlerschranke $|\Delta f(x)| \leq S$ durch:

$$S \approx \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right| s_i.$$

Hausübung

H 19 Gegeben ist ein zylinderförmiger Behälter für den folgende gemessene Werte vorliegen: Umfang $b = 20$ cm, Höhe $h = 5$ cm. Der Flächeninhalt der Zylindermantelfläche und das Volumen des Behälters sollen berechnet werden. Dabei ist bekannt, dass man bei jedem Messwert von einem Fehler von maximal 2mm ausgehen muss. Berechnen Sie das Volumen und den Flächeninhalt der Zylindermantelfläche des Behälters. Schätzen Sie den Fehler für das berechnete Volumen und den Mantelflächeninhalt.

H 20 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x^2 + y^2 - 1$.

- Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f nach x und nach y an der Stelle (x_0, y_0) .
- Bestimmen Sie einen Vektor $v := (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$, in dessen Richtung der Ableitung von f an der Stelle $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ gleich Null ist. Dabei soll $v_1 = 1$ gelten.

H 21 Betrachten Sie das folgende nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} y \sin(2xy) + x & = & 0 \\ x e^{xy} & = & 0 \end{array}$$

- Berechnen Sie näherungsweise eine Lösung des Gleichungssystems mit dem Newton-Verfahren. Beginnen Sie mit dem Startpunkt $(x_0, y_0)^T := (2, 0)^T$.
- Wenden Sie ein weiteres Mal zum Berechnen einer näherungsweisen Lösung des Gleichungssystems das Newton-Verfahren an. Beginnen Sie mit dem Startpunkt $(x_0, y_0)^T := (-1, 0)^T$.