Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Berger
Dr. S.Moritz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

18./21.5.2007

Mathematik II für BI, WIBI, MaWi und GEO, Übung 4

Gruppenübung

G 10 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ eine Abbildung und $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie zur kanonischen Basis die Matrix A zur Abbildung f.

c) Bestimmen Sie zur Basis B die Matrix A' zur Abbildung f.

d) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $A' = S^{-1}AS$ gilt.

e) Berechnen Sie $det(A)$ und $det(A')$.

G 11 Richtig oder falsch?

a) Seien A, B $n \times n$-Matrizen, dann gilt $det(AB) \neq det(BA)$.

b) $det\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & b-a \\ 1 & -a \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 2+a \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.

c) Es seien $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ Spaltenvektoren. Dann gilt

$$(n-1) \quad det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \neq det\begin{pmatrix} na_1 & na_2 \end{pmatrix} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

d) Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ Spaltenvektoren. Dann gilt

$$det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} = (-1) \quad det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

.

G 12 Bestimmen Sie mit der Cramerschen Regel die Lösung zum Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei gelten soll

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 11 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

H 10 Betrachten Sie die erste Aufgabe der Gruppenübung G10.

a) Gegeben sei die Menge L:=$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ mit dem reelwertigen Parameter a. Whlen Sie a so, dass L eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bildet, deren Vektoren orthogonal sind.

b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S' mit $A'' = (S')^{-1}A'(S')$, so dass A'' die Matrix zur Abbildung f bezüglich der Basis L ist und berechnen Sie A''.

H 11 Berechnen Sie die Determinante von $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ durch

a) den Gaussalgorithmus. Formen Sie A zu einer Dreiecksmatrix um.

b) Entwicklung nach der ersten Spalte.

c) die Sarrus-Regel.

d) Begründen Sie mit der Determinanten-Formel von Leibniz, warum für eine Matrix B, die eine Nullspalte enthält, $det(B) = 0$ gilt.

H 12 Gegeben sind die folgenden Matrizen und der Vektor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

mit den Gleichungssystemen $A\vec{x} = \vec{b}$ und $B\vec{x} = \vec{b}$.

a) Entscheiden Sie, welches der beiden Gleichungssysteme sich mit der Cramerschen Regel lösen lässt und berechnen Sie dieses mit der Cramerschen Regel. Das andere Gleichungssytem berechnen Sie mit einer anderen Methode.

b) Zeichen Sie die Lösungsmengen in ein Koordinatensystem.