Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Berger
Dr. S. Moritz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10./11./14.5.2007

# Mathematik II für BI, WIBI, MaWi und GEO, Übung 3

## Gruppenübung

**G 7** Gegeben sind die folgenden Matrizen und der Vektor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die inversen Marizen $A^{-1}$, $B^{-1}$, $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$ und $((A)^3)^{-1}$.

b) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $Ax = b$, $Bx = b$, $(BA)x = b$, $A^2x = b$ und $(AB)x = 0$. Benutzen Sie dazu Aufgabenteil a).

**G 8** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Projektion auf die $y$-Achse.
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um den Ursprung mit dem Drehwinkel $\pi/2$.
Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Abbildung mit $h\left(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T\right) = 2x + 3y$.

a) Berechnen Sie die Matrizen $A, B, C$ der linearen Abbildungen $f, g, h$ bezüglich der kanonischen Basis.

b) Was geschieht geometrisch in einem Koordinatensystem mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ durch Hintereinanderausführung der Abbildungen $f$ und $g$? Betrachten Sie sowohl $f \circ g$ als auch $g \circ f$ und interpretieren Sie Ihre Beobachtung.

c) Berechnen Sie die Matrix $D$, welche die lineare Abbildung $h \circ f \circ g$ beschreibt und berechnen Sie

$$D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (h \circ f \circ g) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

**G 9** Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Es seien $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ die Koordinaten eines Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ zur Basis $L := \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$, es gelte also $\vec{x} = \beta_1\vec{b_1} + \beta_2\vec{b_2} + \beta_3\vec{b_3}$.
Berechnen Sie zuerst die jeweiligen Koordinaten der Vektoren der Basis $L$ bezüglich $E$. Geben Sie dann die Matrizen $B$ und $B^{-1}$ an, mit denen die gegebenen Koordinaten eines Vektors $\vec{x}$ bezüglich der Basis $L$ in die Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich der kanonischen Basis transformiert werden können und umgekehrt.

c) Gegeben sei der Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x_E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$ zur kanonischen Basis $E$. Berechnen Sie seine Koordinaten zur Basis $L$ und zur kanonischen Basis $E$. Benutzen Sie dazu die Ergebnisse von b).

## Hausübung

**H 7** Gegeben seien folgende Vektoren

$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

a) Zeigen Sie, dass $B := \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ und $C := \{\vec{c_1}, \vec{c_2}, \vec{c_3}\}$ Basen des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Es seien $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ die Koordinaten von Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ zur Basis $B$ und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ seien die Koordinaten von $\vec{x}$ zur Basis $C$. Geben Sie eine Matrix $D$ an, die die Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich $B$ in Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich $C$ transformiert. Berechnen Sie $D^{-1}$. Welche Bedeutung hat $D^{-1}$?

c) Gegeben sei der Vektor $\vec{x_B}$ zur Basis $B$ mit den Koordinaten
$\beta_1 = 2, \beta_2 = -1, \beta_3 = 0$, es gilt also $\vec{x_B} = \beta_1\vec{b_1} + \beta_2\vec{b_2} + \beta_3\vec{b_3}$. Berechnen Sie die Koordinaten von $\vec{x_B}$ bezüglich $C$.

**H 8** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Verschiebung des Vektors $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T$ um den Wert $x$ längs der $x$-Achse.
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Winkelhalbierenden $\{(x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$.

a) Bestimmen Sie die Matrizen der linearen Abbildungen $f, g, f \circ g, g \circ f$ bezüglich der kanonischen Basis.

b) Was geschieht geometrisch durch eine Hintereinanderausführung $f \circ g$ mit dem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^T$?

c) Finden Sie einen Vektor $\vec{x}$ für den $(f \circ g)(\vec{x}) = (g \circ f)(\vec{x})$ gilt.

**H 9** Wir betrachten in einem Koordinatensystem die Kurve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, die durch Drehung der Normalparabel um $\pi/2$ entsteht. Uns ist die Normalparabel bekannt als die Menge aller Vektoren $M := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T | y = x^2, x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Berechnen Sie mit Hilfe einer Transformationsmatrix die Kurve $f$.