VI. Integralrechnung

Nachdem wir im letzten Kapitel die Differentialrechnung kennengelernt haben, mit deren Hilfe es möglich ist, die Änderungsrate einer Funktion durch deren Ableitung zu beschreiben, wenden wir uns in diesem Abschnitt der Frage zu, wie man die Fläche berechnet, die ein Funktionsgraph mit der x-Achse einschließt. Die Beobachtung, dass die Änderungsrate dieser Fläche bei fortschreitender rechter Grenze des Definitionsbereichs durch die Funktion gegeben ist, ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung – eines der zentralen Resultate der Analysis der Funktionen von einer Veränderlichen. Insbesondere werden wir sehen, wie sich dieser Satz dazu verwenden lässt, viele konkrete Integrale explizit zu berechnen.

VI.1. Treppenfunktionen

Definition VI.1.1. (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$ ist ein $(n+1)$-Tupel

$$Z = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \quad \text{mit} \quad a = z_0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \ldots \leq z_n = b.$$

Die Zerlegung $Z = (z_0, \ldots, z_n)$ heißt *feiner* als die Zerlegung $W = (w_0, \ldots, w_m)$, wenn $\{w_0, \ldots, w_m\} \subseteq \{z_0, \ldots, z_n\}$ gilt, d.h. wenn jeder Unterteilungspunkt von W auch ein Unterteilungspunkt von Z ist. Sind Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$, so sei $Z_1 \cup Z_2$ diejenige Zerlegung, die durch Vereinigung der Mengen der Unterteilungspunkte entsteht.

(b) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung $Z = (z_0, \ldots, z_n)$ von $[a, b]$ und Zahlen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(t) = c_k \quad \text{für } z_{k-1} < t < z_k.$$

Von den Funktionswerten an den Unterteilungspunkten wird nichts verlangt. Wir schreiben T_a^b für die Menge der Treppenfunktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. ■

Lemma VI.1.2. *Die Menge T_a^b ist ein reeller Vektorraum, d.h., für $f, g \in T_a^b$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind $f + g$ und λf wieder Elemente von T_a^b.*

Beweis. Wegen $T_a^b \subseteq B([a,b])$ (beschränkte Funktionen) haben wir nur zu zeigen, dass T_a^b ein Untervektorraum ist. Für $f \in T_a^b$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist klar, dass $\lambda f \in T_a^b$ ist. Sind f und g Elemente von T_a^b zu den Zerlegungen Z_1 und Z_2, so sind sie auch Treppenfunktionen zu der Zerlegung $Z_1 \cup Z_2$. Also ist $f+g$ Treppenfunktion zu der Zerlegung $Z_1 \cup Z_2$. Daher ist $T_a^b \subseteq B([a,b])$ unter Skalarmultiplikation und Addition abgeschlossen und somit ein Untervektorraum. ■

Satz VI.1.3. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\varphi \in T_a^b$ mit*

$$\|f - \varphi\|_{[a,b]} = \sup\{|f(x) - \varphi(x)| : x \in [a,b]\} \leq \varepsilon.$$

Jede stetige Funktion lässt sich also gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren.

Beweis. Nach Satz IV.1.24 ist f gleichmäßig stetig. Es existiert also ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle x, y mit $|x-y| < \delta$. Wir wählen nun eine Zerlegung $Z := (z_0, \ldots, z_m)$ von $[a,b]$ mit $|z_{k+1} - z_k| < \delta$ für alle $k = 0, \ldots, m-1$ [1] und definieren die Funktion φ durch

$$\varphi(t) := \begin{cases} f(z_k), & \text{für } z_k \leq t < z_{k+1}, k = 0, \ldots, m-1 \\ f(b), & \text{für } t = b. \end{cases}$$

Für $t \in [z_k, z_{k+1}[$ ist dann

$$|\varphi(t) - f(t)| \leq |\varphi(t) - f(z_k)| + |f(z_k) - f(t)| \leq 0 + \varepsilon = \varepsilon,$$

d.h. $\|f - \varphi\|_{[a,b]} \leq \varepsilon$. ■

Folgerung VI.1.4. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\varepsilon > 0$, so existieren Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\psi - \varphi = \varepsilon$.*

Beweis. Mit Satz VI.1.3 finden wir eine Treppenfunktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\|f - h\|_{[a,b]} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann setzen wir $\varphi := h - \frac{\varepsilon}{2}$ und $\psi := h + \frac{\varepsilon}{2}$. Nun ist $\psi - \varphi = \frac{\varepsilon}{2} - (-\frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$ und $\varphi = h - \frac{\varepsilon}{2} \leq f \leq h + \frac{\varepsilon}{2} = \psi$. ■

Das Riemann-Integral

Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die der Graph einer Funktion $f : [a,b] \to [0, \infty[$ mit der x-Achse einschließt, d.h. der Menge

$$F = \{(x,y) : x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

[1] Z.B. eine äquidistante Zerlegung: $z_k = a + k\frac{b-a}{m}$, wobei m so groß gewählt ist, dass $\frac{b-a}{m} < \delta$ ist.

Wir werden sehen, dass sich diese Aufgabe für stetige Funktionen immer lösen lässt. Auch für Funktionen mit endlich vielen Unstetigkeitspunkten lassen sich diese Flächen berechnen. Als problematisch erweisen sich Funktionen, die „sehr oft“ springen, wie zum Beispiel die *Dirichletfunktion*

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{falls } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Wir beginnen die Berechnung des gesuchten Flächeninhalts bei den Treppenfunktionen.

Lemma VI.1.5. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion zur Zerlegung $Z = (z_0, \ldots, z_n)$ mit $f(x) = c_k$ für alle $z_{k-1} < x < z_k$, so hängt die Zahl*

$$S_Z(f) := \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (z_k - z_{k-1})$$

nicht von der Zerlegung Z ab, d.h., für jede andere Zerlegung Z', für die f auf dem Inneren der Zerlegungsintervalle konstant ist, gilt $S_{Z'}(f) = S_Z(f)$.

Beweis. Ist Z' eine andere Zerlegung, so dass f auf dem Innern der Zerlegungsintervalle konstant ist, so existiert eine gemeinsame Verfeinerung von Z und Z'. Es reicht also zu sehen, dass $S_Z(f) = S_{Z'}(f)$ gilt, wenn Z' durch Hinzunahme eines Punktes zu Z entsteht. Sei dazu $z \in [z_{k-1}, z_k]$ und $Z' = (z_0, \ldots, z_{k-1}, z, z_k, \ldots, z_n)$. In diesem Fall ist

$$c_k \cdot (z_k - z_{k-1}) = c_k(z_k - z) + c_k(z - z_{k-1}),$$

und daher $S_Z(f) = S_{Z'}(f)$. Die Behauptung folgt nun durch Induktion nach der Zahl der hinzugenommenen Punkte. ■

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $Z = (z_0, \ldots, z_n)$ eine Zerlegung mit $f(x) = c_k$ für alle $x \in]z_{k-1}, z_k[$. Wir definieren das *Integral von f* durch

$$\int_a^b f := \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (z_k - z_{k-1}).$$

Das ist dadurch gerechtfertig, dass wir uns gerade davon überzeugt haben, dass die rechte Seite $S_Z(f)$ nicht von der Zerlegung Z abhängt.

Für $a = b$ setzen wir $\int_a^a f = 0$; ferner $\int_b^a f = -\int_a^b f$. Die Zahl a heißt die *untere Grenze* des Integrals, die Zahl b die *obere Grenze.* Eine weitere Schreibweise für das Integral ist

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{oder} \quad \int_a^b f(t)\, dt.$$

Satz VI.1.6. *Das Integral von Treppenfunktionen hat folgende Eigenschaften:*

(I1) *Intervalladditivität: Für* $a \leq b \leq c$ *und* $f \in T_a^c$ *gilt*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

(I2) *Monotonie: Sind* $f, g \in T_a^b$ *mit* $f \leq g$*, so ist* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(I3) *Linearität: Für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *und alle Treppenfunktionen* $f, g \in T_a^b$ *gilt*

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

(I4) *Normierung: Ist* f *auf* $[a, b]$ *konstant gleich* c*, so ist* $\int_a^b f = c \cdot (b - a)$.

Beweis. (I1): Ist Z eine Zerlegung des Intervalls $[a, c]$, die den Punkt b enthält, so folgt (I1) direkt aus der Definition des Integrals.
(I2), (I3): Zuerst wählen wir eine gemeinsame Zerlegung Z für f und g. Es gelte $f(x) = c_k$ und $g(x) = d_k$ für $x \in]z_{k-1}, z_k[$.

Ist $f \leq g$, so ist $c_k \leq d_k$ für alle k und daher $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. Andererseits haben wir $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda c_k + \mu d_k$ für alle $x \in]z_{k-1}, z_k[$. Hieraus folgt (I3).
(I4) ist klar. ∎

Definition VI.1.7. (a) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so definieren wir das *Oberintegral*

$$\int_a^{*b} f := \inf \Big\{ \int_a^b \psi : f \leq \psi, \ \psi \in T_a^b \Big\}$$

und das *Unterintegral*

$$\int_{*a}^{b} f := \sup \Big\{ \int_a^b \varphi : \varphi \leq f, \ \varphi \in T_a^b \Big\}.$$

Um die Endlichkeit dieser Werte einzusehen, beachten wir, dass aus der Beschränktheit von f die Existenz von $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq f \leq M$ folgt. Insbesondere existieren $\varphi, \psi \in T_a^b$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$. Für solche Paare gilt $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$ wegen (I2). Insbesondere sind $\int_a^{*b} f$ und $\int_{*a}^b f$ reelle Zahlen mit

$$\int_{*a}^{b} f \leq \int_a^{*b} f.$$

(b) Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrabel (Riemann-integrierbar)*, wenn

$$\int_{*a}^{b} f = \int_a^{*b} f$$

gilt, d.h., wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T_a^b$ mit $\varphi \le f \le \psi$ und $\int_a^b \varphi - \int_a^b \psi \le \varepsilon$ existieren. In diesem Fall definieren wir das *Riemann-Integral von* f durch

$$\int_a^b f := \int_a^{*\,b} f = \int_{a\,*}^b f$$

Die Menge der Riemann-integrablen Funktionen auf $[a,b]$ bezeichnen wir mit R_a^b. Wir bemerken, dass $T_a^b \subseteq R_a^b$ trivialerweise gilt. Für $f \in R_a^b$ definieren wir $\int_b^a f := -\int_a^b f$. ∎

Beispiel: Ein wichtiges Beispiel, das die Subtilität des Integrierbarkeitsbegriff zeigt, ist die *Dirichlet-Funktion*:

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Da jedes offene Intervall reeller Zahlen eine rationale Zahl enthält, gelten für jedes Paar von Treppenfunktionen φ, ψ mit $\varphi \le f \le \psi$ die Beziehungen $\varphi \le 0$ und $1 \le \psi$ bis auf endlich viele Punkte. Mit $0 \le f \le 1$ ergibt sich damit

$$\int_{0\,*}^1 f = 0 < 1 = \int_0^{*\,1} f.$$

Insbesondere ist f nicht Riemann-integrabel. ∎

Satz VI.1.8. *Das Riemann-Integral hat folgende Eigenschaften:*

(I1) *Intervalladditivität: Für $a \le b \le c$ ist $f \in R_a^c$ genau dann, wenn $f|_{[a,b]} \in R_a^b$ und $f|_{[b,c]} \in R_b^c$ gelten. In diesem Fall ist*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

(I2) *Monotonie: Sind $f, g \in R_a^b$ mit $f \le g$, so ist $\int_a^b f \le \int_a^b g$.*

(I3) *Linearität: Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f, g \in R_a^b$ ist $\lambda f + \mu g \in R_a^b$ mit*

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

(I4) *Normierung: Ist f auf $[a,b]$ konstant gleich c, so ist $\int_a^b f = c \cdot (b-a)$.*

Beweis. (I1) **Zwischenbehauptung:** Das Oberintegral ist intervalladditiv, d.h., für jede beschränkte Funktion $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^{*\,c} f = \int_a^{*\,b} f + \int_b^{*\,c} f.$$

Für $\psi \in T_a^c$ mit $f \le \psi$ gilt $\int_a^c \psi = \int_a^b \psi + \int_b^c \psi \ge \int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f$, also auch

$$\int_a^{*c} f \ge \int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f.$$

Seien nun $\psi_1 \in T_a^b$ und $\psi_2 \in T_b^c$ zwei Treppenfunktionen mit $\psi_1 \ge f|_{[a,b]}$ und $\psi_2 \ge f|_{[b,c]}$. Aus diesen erhält man eine neue Treppenfunktion durch

$$\psi(x) := \begin{cases} \psi_1(x), & \text{falls } x \in [a,b[\\ \psi_2(x), & \text{falls } x \in [b,c]. \end{cases}$$

Diese neue Treppenfunktion ist Element von T_a^c, und es gilt $\psi \ge f$. Nun ist $\int_a^b \psi_1 + \int_b^c \psi_2 = \int_a^c \psi \ge \int_a^{*c} f$, also auch

$$\int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f \ge \int_a^{*c} f,$$

denn für zwei nach unten beschränkte Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ist

$$\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B).$$

Damit ist die Intervalladditivität des Oberintegrals gezeigt. Die analoge Aussage für Unterintegrale erhält man genauso und durch Zusammensetzen

$$\int_a^{*c} f = \int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f \ge \int_{*a}^{b} f + \int_{*b}^{c} f = \int_{*a}^{c} f.$$

Ist nun $f \in R_a^c$, so ist $\int_a^{*c} f = \int_{*a}^{c} f$ und wir erhalten wegen $\int_a^{*b} f \ge \int_{*a}^{b} f$ und $\int_b^{*c} f \ge \int_{*b}^{c} f$ zwischen den inneren Summanden $\int_a^{*b} f = \int_{*a}^{b} f$ und $\int_b^{*c} f = \int_{*b}^{c} f$. Dies bedeutet $f\,|_{[a,b]} \in R_a^b$ und $f\,|_{[b,c]} \in R_b^c$. Ferner erhalten wir die Intervalladditivität.

Sind andererseits $f|_{[a,b]} \in R_a^b$ und $f|_{[b,c]} \in R_b^c$, so gilt

$$\int_a^{*c} f = \int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f = \int_{*a}^{b} f + \int_{*b}^{c} f = \int_{*a}^{c} f$$

und folglich $f \in R_a^c$. Auch in diesem Fall erhalten wir die gewünschte Gleichheit. Damit ist (I1) bewiesen.

(I2) Monotonie: Seien $f, g \in R_a^b$ und $f \le g$ auf $[a,b]$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f = \int_a^{*b} f &= \inf\left\{ \int_a^b \psi : f \le \psi,\ \psi \in T_a^b \right\} \\ &\le \inf\left\{ \int_a^b \psi : g \le \psi,\ \psi \in T_a^b \right\} = \int_a^{*b} g = \int_a^b g \end{aligned}$$

wegen

$$\Big\{\int_a^b \psi : f \le \psi,\ \psi \in T_a^b\Big\} \supseteq \Big\{\int_a^b \psi : g \le \psi,\ \psi \in T_a^b\Big\}.$$

(I3) Linearität: Seien $f, g \in R_a^b$ und φ und ψ zwei Treppenfunktionen mit $f \le \varphi$ und $g \le \psi$. Dann ist $f + g \le \varphi + \psi$, also

$$\int_a^{*b} f + g \le \int_a^b \varphi + \psi = \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi.$$

Daher gilt nach Übergang zum Infimum auf der rechten Seite auch

$$\int_a^{*b} f + g \le \int_a^{*b} f + \int_a^{*b} g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Hierbei verwenden wir wieder die Ungleichung

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$$

für nichtleere Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Ferner erhält man analog

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_{*a}^b f + \int_{*a}^b g \le \int_{*a}^b f + g \le \int_a^{*b} f + g.$$

Diese zwei Ungleichungsketten zeigen, dass überall Gleichheit gilt; insbesondere folgt $\int_a^{*b} f + g = \int_{*a}^b f + g$, d.h. $f + g \in R_a^b$ und die Additivität des Integrals.

Wir zeigen noch $\lambda f \in R_a^b$ und $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$. Für $\lambda = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei zunächst $\lambda > 0$. Dann gilt für jede Funktion $f \in R_a^b$:

$$\int_a^{*b} \lambda f = \lambda \int_a^{*b} f = \lambda \int_{*a}^b f = \int_{*a}^b \lambda f;$$

folglich ist $\lambda f \in R_a^b$ und $\lambda \int_a^b f = \int_a^b \lambda f$. Ist $\lambda < 0$, also $\lambda = -|\lambda|$, und $f \le \psi$, so ist $\lambda f \ge \lambda\psi$. Es folgt

$$\int_{*a}^b \lambda f = \lambda \int_a^{*b} f = \lambda \int_{*a}^b f = \lambda \int_a^b f$$

und analog $\int_a^{*b} \lambda f = \lambda \int_{*a}^b f = \lambda \int_a^b f$, also $\lambda f \in R_a^b$ und $\lambda \int_a^b f = \int_a^b \lambda f$.

(I4) ist klar (vgl. Satz VI.1.6). ∎

Bemerkung VI.1.9. Es gilt $\int_a^a f = 0$ für alle Funktionen

$$f : [a, a] = \{a\} \to \mathbb{R},$$

denn für alle Treppenfunktionen $\psi \in T_a^a$ ist $\int_a^a \psi = 0$. ∎

Satz VI.1.10. *Stetige Funktionen und monotone Funktionen* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *sind Riemann-integrabel.*

Beweis. (a) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f nach Satz IV.1.12 beschränkt. Nach Folgerung VI.1.4 existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T_a^b$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\psi - \varphi = \frac{\varepsilon}{b-a}$. Dann ist aber $\int_a^b \psi - \varphi = \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon$, und somit $f \in R_a^b$.

(b) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Wegen $f(x) \in [f(a), f(b)]$ für $x \in [a,b]$ ist f beschränkt. Sei o.B.d.A. $f(a) \neq f(b)$ (sonst ist f konstant und die Behauptung trivial). Wir wählen eine Zerlegung $Z = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$ von $[a,b]$ mit $z_k - z_{k-1} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ für $k = 1, 2, \ldots, n$. Nun definieren wir zwei Treppenfunktionen φ und $\psi \in T_a^b$ durch $\varphi(x) := f(z_k)$ bzw. $\psi(x) := f(z_{k+1})$ für $x \in [z_k, z_{k+1}[$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ und $\varphi(b) = \psi(b) = f(b)$. Dann ist offensichtlich $\varphi \leq f \leq \psi$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \psi - \varphi \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(z_{k+1}) - f(z_k)\right)(z_{k+1} - z_k) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(z_{k+1}) - f(z_k)\right) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \\
&= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \left(f(z_n) - f(z_{n-1}) + f(z_{n-1}) - f(z_{n-2}) + \ldots + f(z_1) - f(z_0)\right) \\
&= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \left(f(b) - f(a)\right) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

und damit ist f Riemann-integrabel. Für monoton fallendes f geht man zu $-f$ über und beachtet, dass R_a^b ein Vektorraum ist. ■

Aufgabe VI.1. Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$x_+ := \max(x, 0) \quad \text{und} \quad x_- := \max(0, -x) = x_+ - x \geq 0.$$

Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ die Beziehung

$$x_+ \leq y_+ \quad \text{und} \quad y_- \leq x_-.$$ ■

Lemma VI.1.11. *Für* $f, g \in R_a^b$ *sind die Funktionen*

$$f_+ := \max(f, 0), \quad f_- := \max(-f, 0), \quad \max(f,g), \quad \min(f,g) \quad \textit{und} \quad |f|$$

integrabel.

Beweis. Es ist $f_- = f_+ - f$, $|f| = f_+ + f_-$, $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|$ sowie $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|$. Wegen Satz VI.1.8 reicht es aus, die Integrabilität von f_+ zu zeigen.

Dazu seien zwei Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T_a^b$ gegeben, für die $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b \psi - \varphi < \varepsilon$ gilt. Dann gelten auch $\varphi_+ \leq f_+ \leq \psi_+$ und

$$\int_a^b \psi_+ - \varphi_+ \leq \int_a^b \psi - \varphi < \varepsilon,$$

da $\psi_+ - \varphi_+ \leq \psi - \varphi$ aus $\psi_+ - \psi = \psi_- \leq \varphi_- = \varphi_+ - \varphi$ folgt (Aufgabe VI.1). ■

Satz VI.1.12. (Dreiecksungleichung) *Für $a \leq b$ und $f \in R_a^b$ gilt*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Beweis. Aus Lemma VI.1.11 erhalten wir $|f| \in R_a^b$. Weiter ist $-|f| \leq f \leq |f|$, also wegen der Monotonie des Integrals $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. Hieraus folgt $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$. ■

Lemma VI.1.13. *Für $f, g \in R_a^b$ ist auch $f \cdot g \in R_a^b$.*

Beweis. Wegen $f \cdot g = \frac{1}{2}(f+g)^2 - \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}g^2$ haben wir wegen (I3) nur $f^2 \in R_a^b$ zu zeigen. Wegen $|f| \in R_a^b$ (Lemma VI.1.11) und $f^2 = |f|^2$ dürfen wir sogar $f \geq 0$ annehmen.

Sei $\varepsilon > 0$ und $M := \sup f([a,b])$. Dann existieren $\varphi, \psi \in T_a^b$ mit

$$0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq M \quad \text{und} \quad \int_a^b (\psi - \varphi) \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

In der Tat finden wir zunächst $\varphi_0, \psi_0 \in T_a^b$ mit $\varphi_0 \leq f \leq \psi_0$ und $\int_a^b (\psi_0 - \varphi_0) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$. Dann setzen wir $\varphi := \max(0, \varphi_0)$ und $\psi := \min(f, \psi_0)$ und erhalten $\varphi_0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq \psi_0$.

Damit sind $\varphi^2, \psi^2 \in T_a^b$, $\varphi^2 \leq f^2 \leq \psi^2$ und

$$\int_a^b \psi^2 - \varphi^2 = \int_a^b \underbrace{(\psi + \varphi)}_{\leq 2M}(\psi - \varphi) \leq \int_a^b 2M(\psi - \varphi) \leq 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Also ist $f^2 \in R_a^b$. ■

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz VI.1.14. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in R_a^b$ sowie $g \geq 0$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f \cdot g = f(\xi) \cdot \int_a^b g.$$

Für $g = 1$ folgt insbesondere

$$\int_a^b f = f(\xi) \cdot (b-a)$$

für ein $\xi \in [a,b]$.

Beweis. Sei $m = \min f([a,b])$ und $M = \max f([a,b])$. Wegen $g \geq 0$ ist dann $mg \leq fg \leq Mg$, also $m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g$. Beachte hierbei, dass $\int_a^b fg$ wegen Lemma VI.1.13 existiert. Wir wenden jetzt den Zwischenwertsatz auf die stetige Funktion $F(x) := f(x)\int_a^b g$ an. Da F die beiden Werte $m\int_a^b g$ und $M\int_a^b g$ annimmt, existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi)\int_a^b g = \int_a^b fg$. ■

VI.2. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir zeigen nun, dass Ableiten und Integrieren zueinander inverse Operationen sind. In diesem Abschnitt sei D ein Intervall, das mehr als einen Punkt enthält.

Definition VI.2.1. Eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ heißt eine *Stammfunktion* von $f : D \to \mathbb{R}$, wenn F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt. ■

Beachte: Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f, so ist $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$, also ist $F_1 - F_2$ konstant (vgl. Folgerung V.2.3).

HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

Satz VI.2.2. *Sei D ein Intervall mit mehr als einem Punkt. Ist $a \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist die Funktion*

$$F\colon x \mapsto \int_a^x f$$

eine Stammfunktion von f auf D. Ist umgekehrt F eine Stammfunktion von f auf D, so gilt für alle $x \in D$:

$$\int_a^x f = F(x) - F(a) =: [F]_a^x.$$

Beweis. Für $x, x+h \in D$ ist nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz VI.1.14)

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = f(x + \theta_h h)$$

für ein $\theta_h \in [0,1]$. Folglich ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

Daher ist F eine Stammfunktion zu f. Ist $\widetilde{F}$ eine weitere Stammfunktion zu f, so ist $\widetilde{F}-F$ konstant, also

$$\widetilde{F}(x)-\widetilde{F}(a) = F(x)-F(a) = \int_a^x f. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung: Alternativ kann man den Hauptsatz auch direkt, also ohne den Mittelwertsatz beweisen. Sei dazu $x \in D$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert zunächst ein $\delta > 0$, so dass $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$ für $|x-y| \leq \delta$ gilt. Für $|h| \leq \delta$ ergibt sich damit

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) + f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\, dt,$$

und daher

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\, dt \leq \frac{1}{|h|}\varepsilon|h| = \varepsilon.$$

Damit haben wir

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

gezeigt. $\blacksquare$

Der wesentliche Vorteil des Hauptsatzes ist, dass er uns ein Mittel in die Hand gibt, um Integrale wirklich auszurechnen, indem wir eine Stammfunktion bestimmen. In der Regel ist das technisch einfacher als direkt zu integrieren.

Bemerkung VI.2.3. (Unbestimmte Integrale) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mindestens zwei Punkten. Auf der Menge $C(D)$ der stetigen Funktionen $D \to \mathbb{R}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation durch

$$F \sim G :\Longleftrightarrow F - G \quad \text{ist konstant.}$$

Wir schreiben $[F] := \{G : G \sim F\}$ für die Äquivalenzklasse der Funktion F, d.h. für die Menge der Funktionen der Gestalt $F + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ist F differenzierbar, so sind alle zu F äquivalenten Funktionen G differenzierbar mit $F' = G'$.

Ist umgekehrt $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f, so definieren wir das *unbestimmte Integral* auf D durch

$$\int f(x)\, dx := [F] = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

Ein unbestimmtes Integral ist also eine Menge von Funktionen und **keine Funktion**. Die Bezeichnung wird dadurch gerechtfertigt, dass

$$F(b) - F(a) = [F]_a^b = \int_a^b f(x)\, dx$$

für alle $a, b \in D$ gilt (Satz VI.2.2) und nicht von der Wahl des speziellen Repräsentanten F in der Äquivalenzklasse $[F]$ abhängt. $\blacksquare$

Beispiel VI.2.4. (a) Für eine Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ ist

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

eine Stammfunktion.
(b) Für $f = \exp$ ist $F = \exp$ eine Stammfunktion.
(c) Sei $-1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Für $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^\alpha$ ist $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ eine Stammfunktion. Ist $\alpha = -1$ und $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{1}{x}$, so ist $F(x) = \log x$ eine Stammfunktion. Speziell ist für alle $x \geq 1$:

$$\int_1^x \frac{1}{t} \, dt = \log x - \log 1 = \log x. \qquad \blacksquare$$

Jede Regel der Differentialrechnung zieht eine Regel der Integralrechnung nach sich. Aus der Kettenregel wird so die Transformationsformel:

TRANSFORMATIONSFORMEL/SUBSTITUTIONSREGEL

Satz VI.2.5. *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\varphi : [a,b] \to D$ stetig differenzierbar, so ist $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ Riemann-integrabel und es gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du.$$

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass die stetige Funktion $(f \circ \varphi)\varphi'$ nach Lemma VI.1.13 auf $[a,b]$ integrabel ist. Wir betrachten die Funktionen

$$F : D \to \mathbb{R}, \ F(x) = \int_{\varphi(a)}^{x} f(u) \, du \quad \text{und} \quad G := F \circ \varphi \colon [a,b] \to \mathbb{R}.$$

Nach dem Hauptsatz ist F differenzierbar mit $F' = f$ und nach der Kettenregel ist G differenzierbar mit $G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, d.h., G ist eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi)\varphi'$ auf dem Intervall D. Folglich ist

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = G(b) - G(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du. \qquad \blacksquare$$

Beispiel VI.2.6. Gesucht ist für $y > 0$ das Integral $\int_0^y x\sqrt{1+x} \, dx$. Zuerst stellen wir fest, dass der Integrand stetig ist und das Integral daher definiert ist. Wir setzen $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$, d.h. $x = \varphi(x)^2 - 1$. Nach der Kettenregel gilt $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\varphi(x)}$. Somit können wir rechnen:

$$\begin{aligned}
&\int_0^y x\sqrt{1+x} \, dx \\
&= \int_0^y \big(\varphi(x)^2 - 1\big) \varphi(x) \, dx = \int_0^y \big(\varphi(x)^2 - 1\big) \varphi(x) \cdot \underbrace{2\varphi(x)\varphi'(x)}_{=1} \, dx \\
&= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(y)} (u^2 - 1) 2u^2 \, du = 2 \int_1^{\sqrt{1+y}} u^4 - u^2 \, du = 2 \Big[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{1+y}} \\
&= \frac{2}{5}(1+y)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Indem man den Kalkül der unbestimmten Integrale verwendet, lassen sich Stammfunktionen oft direkt bestimmen. Für das obige Beispiel geht man hier wie folgt vor.

Gesucht ist das unbestimmte Integral $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ auf $D =]0,\infty[$. Mit

$$u = \sqrt{1+x}, \qquad x = u^2 - 1$$

erhalten wir

$$\frac{dx}{du} = 2u$$

und daher haben wir im Sinne unbestimmter Integrale

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x}\,dx &= \int (u^2-1)u\frac{dx}{du}\,du \\ &= \int (u^2-1)2u^2\,du = \left[\tfrac{2}{5}u^5 - \tfrac{2}{3}u^3\right] = \left[\tfrac{2}{5}(\sqrt{1+x})^5 - \tfrac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3\right].\end{aligned}$$

Wir erkennen nun, dass durch

$$F(x) := \tfrac{2}{5}(\sqrt{1+x})^5 - \tfrac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3$$

auf $]0,\infty[$ eine Stammfunktion von $f(x) = x\sqrt{1+x}$ gegeben ist und können jedes Integral über ein Teilintervall von D leicht durch Einsetzen der Grenzen berechnen:

$$\int_0^y x\sqrt{1+x}\,dx = F(y) - F(0) = \tfrac{2}{5}(1+y)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}} - \left(\tfrac{2}{5} - \tfrac{2}{3}\right).$$

Man beachte, dass die Rechnungen in beiden Fällen sinngemäß die gleichen waren, aber dass man auf der Ebene der unbestimmten Integrale mit den formalen Regeln

$$dx = \frac{dx}{du}du \quad \text{bzw.} \quad du = \frac{du}{dx}dx,$$

die der Substitutionsregel entsprechen, leichter rechnen kann. ∎

Anwendungen der Transformationsformel: Es gelten

- $\int_a^b f(t+c)\,dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$ (setze $\varphi(t) = t+c$)
- $c\int_a^b f(ct)\,dt = \int_{ca}^{cb} f(x)\,dx$ (setze $\varphi(t) = ct$)
- $\int_a^b t^{n-1} f(t^n)\,dt = \frac{1}{n}\int_{a^n}^{b^n} f(x)\,dx$ (setze $\varphi(t) = t^n$). ∎

Lemma VI.2.7. *Ist $f : [a,b] \to f([a,b])$ streng monoton und differenzierbar, so existiert auf $f([a,b])$ die inverse Funktion $f^{-1} : f([a,b]) \to [a,b]$, und es gilt:*

$$\int_a^b f + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1} = b \cdot f(b) - a \cdot f(a).$$

Beachte, dass f und f^{-1} beide stetig und monoton sind, also auf $[a,b]$ bzw. auf $f([a,b])$ integrierbar.

Beweis. Wir setzen

$$g(x) := \int_a^x f + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1} \; - x \cdot f(x) + a \cdot f(a).$$

Dann ist nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} g'(x) &= f(x) + f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) - 1 \cdot f(x) - x \cdot f'(x) \\ &= f(x) + xf'(x) - f(x) - xf'(x) = 0. \end{aligned}$$

Daher ist g konstant, also $g(b) = g(a) = 0$. ■

PARTIELLE INTEGRATION

Satz VI.2.8. *Sind $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \big[f \cdot g\big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

Beweis. Die Funktion $h := f \cdot g$ ist Stammfunktion von $f \cdot g' + f' \cdot g$. Also gilt

$$\int_a^b (f \cdot g' + f' \cdot g) = h(b) - h(a) = \big[f \cdot g\big]_a^b.$$ ■

Beispiel VI.2.9. (a) Für $g(x) = x$ erhält man $\int_a^b f = \big[f \cdot x\big]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot x\,dx$. Speziell ergibt sich für $f = \log$ auf $D =]0, \infty[$:

$$\begin{aligned} \int_a^b \log x\;dx &= \big[x \cdot \log x\big]_a^b - \int_a^b \log'(x) \cdot x\;dx \\ &= \big[x \cdot \log x\big]_a^b - \int_a^b \tfrac{x}{x}\;dx = \big[x \cdot \log x\big]_a^b - (b-a) \\ &= \big[x \cdot \log x - x\big]_a^b, \end{aligned}$$

d.h. $h(x) := x \log x - x$ ist eine Stammfunktion der Logarithmusfunktion.

Mit unbestimmten Integralen berechnet man dies wie folgt:

$$\int \log x\;dx = [x \log x] - \int \log'(x) x\;dx = [x \log x] - \int 1 dx = [x \log x - x].$$

Man beachte, dass man hierbei mit Klassen von Funktionen rechnet.

(b) Sei

$$A_m(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} A_m(x) &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^m}\right]_0^x + \int_0^x \frac{t \cdot 2t \cdot m}{(1+t^2)^{m+1}}\, dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m \int_0^x \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{m+1}}\, dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2mA_m(x) - 2mA_{m+1}(x). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich eine Rekursionsformel zur Berechnung dieser Integrale:

$$A_{m+1}(x) = \frac{2m-1}{2m} A_m(x) + \frac{x}{2m(1+x^2)},$$

wobei

$$A_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)} = \arctan(x) - \arctan(0) = \arctan(x)$$

ist (vgl. Bemerkung V.4.16(5)). ■

VI.3. Integrale und Funktionenfolgen

In diesem Abschnitt stellen wir uns die Frage, inwieweit das Integrieren und das Ableiten mit der Konvergenz von Funktionenfolgen verträglich ist. Für die Integration ist das recht unproblematisch: gleichmäßige Konvergenz reicht hier aus, um Grenzübergang und Integration zu vertauschen. Bei der Differentiation ist es etwas subtiler, denn hier wird man fordern, dass die Folge der Ableitungen gleichmäßig konvergiert und der Tatsache Rechnung tragen, dass eine Funktion nicht durch ihre Ableitung bestimmt ist.

Um unsere Intuition zu schärfen, betrachten wir zuerst einige Beispiele.

Beispiel VI.3.1. Wir betrachten wieder die Funktionenfolge

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x, & \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n} \\ 0, & x > \frac{2}{n}. \end{cases}$$

Wir wollen diese Funktionen integrieren.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} n^2 (\tfrac{2}{n} - x)\, dx = n^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{n}} + n^2 \left[-\tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{n} - x)^2\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \\ &= n^2 \frac{1}{2n^2} + n^2 \frac{1}{2n^2} = 1 \ \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Andererseits ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ (vgl. Beispiel IV.2.2). Im allgemeinen ist also

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \neq \lim_{n\to\infty} \int f_n. \qquad \blacksquare$$

Vertauschen von Grenzübergang und Integral

Satz VI.3.2. *Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und sind alle Folgenglieder f_n integrabel, so ist auch f integrabel und*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und

$$\|f_n - f\|_{[a,b]} = \sup_{a\le x\le b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für $n > N_\varepsilon$ (gleichmäßige Konvergenz). Da f_n integrabel ist, existieren $\psi_n, \varphi_n \in T_a^b$ mit $\varphi_n \le f_n \le \psi_n$ und $\int_a^b \psi_n - \varphi_n < \varepsilon$. Dann ist auch

$$\varphi_n - \varepsilon \le f_n - \varepsilon \le f \le f_n + \varepsilon \le \psi_n + \varepsilon.$$

Weiter gilt

$$\int_a^b (\psi_n + \varepsilon) - (\varphi_n - \varepsilon) = 2\varepsilon(b-a) + \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) \le 2\varepsilon(b-a) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist daher $f \in R_a^b$. Aus $\|f_n - f\|_{[a,b]} \le \varepsilon$ folgt weiter mit Satz VI.1.12:

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \le \int_a^b |f - f_n| \le \varepsilon(b-a).$$

Hieraus schließen wir $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$. $\blacksquare$

Vertauschen von Grenzübergang und Ableitung

Satz VI.3.3. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f_n: D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen.*

(1) *Für einen Punkt $p \in D$ sei die Folge $\big(f_n(p)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und*

(2) *die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sei gleichmäßig konvergent.*

Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine stetig differenzierbare Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, und es gilt

$$f' = \big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

Beweis. Für $x \in D$ gilt erhalten wir aus dem Hauptsatz $f_n(x) = f_n(p) + \int_p^x f_n'(t)\,dt$. Also existiert

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(p) + \lim_{n\to\infty} \int_p^x f_n'(t)\,dt = f(p) + \int_p^x \big(\lim_{n\to\infty} f_n'\big)(t)\,dt$$

nach Satz VI.3.2. Daher existiert $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ punktweise. Da $\lim_{n\to\infty} f_n'$ nach Satz IV.2.12 stetig ist, ist f nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar mit Ableitung $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$. ∎

Bemerkung VI.3.4. (a) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Satz VI.3.3 konvergiert auf jedem Intervall der Gestalt $[a,b] \subseteq D$ gleichmäßig, denn für jedes $x \in [a,b]$ gilt

$$\begin{aligned}
&|f(x) - f_n(x)| \\
&\leq |f(p) - f_n(p)| + \Big|\int_p^x f' - f_n'\Big| \leq |f(p) - f_n(p)| + |x-p| \cdot \|f' - f_n'\|_D \\
&\leq |f(p) - f_n(p)| + \max(|b-p|, |a-p|) \cdot \|f' - f_n'\|_D.
\end{aligned}$$

(b) Die Voraussetzung des Satzes sind nicht überflüssig, denn die Folge $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx)$ konvergiert auf $D = \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen 0, aber die Folge $f_n'(x) = \cos(nx)$ der Ableitungen nicht. Es ist also

$$\big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)' = 0 \neq \lim_{n\to\infty} f_n'.$$ ∎

Ableitung und Integration von Potenzreihen

Ist $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-p)^n$ eine reelle Potenzreihe, so heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty n \cdot a_n(x-p)^{n-1} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n(x-p)^{n+1}}{n+1}$$

ihre *formale Ableitung* bzw. ihr *formales Integral.*

Satz VI.3.5. (a) *Die formale Ableitung und das formale Integral einer Potenzreihe haben den gleichen Konvergenzradius R wie die Reihe selbst.*

(b) *Ist*

$$f(x) := \sum_{k=0}^\infty a_k(x-p)^k \quad \textit{für } |x-p| < R,$$

so ist $f : \,]p-R, p+R[\, \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \sum_{k=0}^\infty k \cdot a_k(x-p)^{k-1};$$

ferner ist

$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x-p)^{k+1}}{k+1}$$

auf $]\,p-R, p+R\,[$ *eine Stammfunktion von* f.

Beweis. Nach der Formel von Hadamard ist

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Für $x \neq p$ haben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n = (x-p)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^{n-1} = (x-p) \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1}(x-p)^n.$$

Also haben die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(x-p)^n$ den gleichen Konvergenzradius und die Hadamardsche Formel liefert

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+2}|}} = \cdots = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+k}|}}$$

für all $k \in \mathbb{N}$. Da wir aus Lemma III.4.10 die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}$$

kennen, erhalten wir

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot |a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}.$$

Aus obigen Vorüberlegungen schließen wir nun, dass die formale Ableitung und das formales Integral beide den Konvergenzradius R besitzen.

Ist $r < R$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-p)^k$ gleichmäßig für $|x-p| \leq r$ (Satz IV.2.17). Nach Satz VI.3.2 gilt also für $|x-p| < R$:

$$\begin{aligned}\int_p^x f(t)\,dt &= \int_p^x \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-p)^k\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_p^x a_k(t-p)^k\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x-p)^{k+1}}{k+1} = F(x).\end{aligned}$$

Damit ist das formale Integral F eine Stammfunktion von f auf $]\,p-R, p+R\,[$. Ist $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n(x-p)^{n-1}$ die Funktion auf $]\,p-R, p+R\,[$, die wir durch die Konvergenz der formalen Ableitung der Potenzreihe von f erhalten, so folgt wie oben, dass f eine Stammfunktion von g ist, d.h. $f' = g$. ■

Folgerung: Wird die Funktion f auf dem Intervall $]p-R, p+R[$ durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt, so ist sie dort beliebig oft differenzierbar. ■

Bemerkung VI.3.6. (1) Für $|x| < 1$ gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}.$$

Nach Satz VI.3.5 erhalten wir für $|x| < 1$ die Reihenentwicklung der Arcustangensfunktion

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Nach dem Leibnizkriterium ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ konvergent. Mit dem Abelschen Grenzwertsatz kann man sogar zeigen, dass

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \lim_{x \to 1} \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots .$$

(2) Für $|x| < 1$ ist

$$\log'(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Analog zu (1) folgt für $|x| < 1$:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Insbesondere erhalten wir mit dem Leibnizkriterium und dem Abelschen Grenzwertsatz die Beziehung

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots . \qquad \blacksquare$$