V. Differentialrechnung

Ausgehend von der Frage nach der Approximierbarkeit von Funktionen durch affine Funktionen, d.h., Funktionen, deren Graph eine Gerade ist, werden wir in diesem Kapitel zu dem Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall D geführt. Wir werden sehen, dass das lokale Verhalten einer differenzierbaren Funktion sehr eng mit dem Verhalten ihrer Ableitung korrelliert ist (Abschnitt V.2). Hieraus ergeben sich insbesondere einfache Kriterien für lokale Extremwerte von Funktionen, die man zur Lösung vieler praktischer Probleme verwenden kann. Schließlich führen wir in Abschnitt V.3 die wichtigsten trigonometrischen Funktionen wie die Sinus- und Cosinusfunktion ein und definieren die Zahl π.

V.1. Die Ableitung

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, das mindestens zwei Punkte enthält.

Definition V.1.1. (a) Ist $a \in \mathbb{R}$, so heißt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax$, *lineare Funktion mit Steigung a.*

(b) Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so heißt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ *affin.* ■

Für affine Funktionen f mit $f(x) = ax + b$ gilt

$$f(x + h) - f(x) = a(x + h) - ax = a \cdot h,$$

d.h., der „Zuwachs“ $f(x + h) - f(x)$ ist linear in h.

Definition V.1.2. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt bei $p \in D$ *differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(p) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}$$

existiert. Wir nennen f *differenzierbar*, wenn sie bei allen $p \in D$ differenzierbar ist. Eine andere Schreibweise für $f'(p)$ ist $\frac{df}{dx}(p)$. Diese Zahl heißt *Ableitung* oder *Differentialquotient* in p. Die Zahlen $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ stellt man sich in diesem Sinne als Differenzenquotienten vor. Sie beschreiben die Steigung der Sekanten des Graphen von f, die durch die beiden Punkte $(p, f(p))$ und $(p + h, f(p + h))$ geht (Skizze!). ■

Lemma V.1.3. *Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ in $p \in D$ differenzierbar, so ist f in p stetig.*

Beweis. Aus $\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = f'(p)$ und den Grenzwertsätzen folgt

$$\lim_{h\to 0} f(p+h) - f(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} h = f'(p) \cdot \lim_{h\to 0} h = 0.$$

Also ist f in p stetig. ■

Beispiel V.1.4. (a) Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ gilt $f(p+h) - f(p) = ah$, also ist $f'(p) = a$ für alle $p \in \mathbb{R}$ und f ist überall differenzierbar.

(b) Die Betragsfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist stetig, aber in 0 nicht differenzierbar: Da die Grenzwerte

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{h\nearrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\nearrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

nicht übereinstimmen, existiert $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ nicht. ■

Wir kommen nun zu einer Charakterisierung der Differenzierbarkeit, die beweistechnisch sehr angenehm ist.

Lemma V.1.5. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $p \in D$ differenzierbar, wenn eine in 0 stetige Funktion Φ auf $D - p := \{h \in \mathbb{R}\colon p + h \in D\}$ mit*

$$f(p+h) - f(p) = \Phi(h) \cdot h \quad \textit{für alle } h \in D - p \tag{1.1}$$

existiert. In diesem Fall ist $f'(p) = \Phi(0)$.

Beweis. Ist f in p differenzierbar, so setzen wir

$$\Phi(h) := \begin{cases} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}, & h \neq 0, h \in D - p \\ f'(p), & h = 0. \end{cases}$$

Dann ist Φ im Nullpunkt stetig. Die Umkehrung ist klar, denn aus (1.1) folgt sofort

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \Phi(h) = \Phi(0),$$

wegen der Stetigkeit von Φ in 0. ■

Bemerkung V.1.6. Ist f in p differenzierbar, so haben wir

$$f(p+h) = f(p) + \Phi(h) \cdot h = \underbrace{f(p) + f'(p) \cdot h}_{\text{affine Funktion}} + \underbrace{(\Phi(h) - f'(p))\, h}_{\text{Restglied.}}$$

Für das Restglied $r(h) := (\Phi(h) - f'(p))h$ gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

(es verschwindet von höherer Ordnung). ■

Satz V.1.7. (Rationale Operationen) *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in p differenzierbar und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $\lambda f + \mu g$, $f \cdot g$ und, falls $f(p) \neq 0$ ist, $\frac{1}{f}$ in p differenzierbar. Die Ableitungen berechnet man wie folgt:*

(1) Linearität: $(\lambda f + \mu g)'(p) = \lambda f'(p) + \mu g'(p)$

(2) Produktregel: $(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$

(3) Quotientenregel: $\left(\frac{1}{f}\right)'(p) = -\frac{f'(p)}{f(p)^2}$.

Beweis. Wegen Lemma V.1.5 existieren auf $D - p$ Funktionen Φ und Ψ mit folgenden Eigenschaften. Wir haben $f(p+h) - f(p) = \Phi(h) \cdot h$, Φ stetig in 0, $\Phi(0) = f'(p)$, und genauso $g(p+h) - g(p) = \Psi(h) \cdot h$, Ψ stetig in 0 sowie $\Psi(0) = g'(p)$.

(1) Wir erhalten daher

$$(\lambda f + \mu g)(p+h) - (\lambda f + \mu g)(p) = \lambda \Phi(h)h + \mu \Psi(h)h = (\lambda \Phi(h) + \mu \Psi(h))h,$$

und die Funktion $\lambda \Phi + \mu \Psi$ ist im Nullpunkt stetig und nimmt dort den Wert $\lambda f'(p) + \mu g'(p)$ an (Lemma V.1.5).

(2) Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(p+h) &= \big(f(p) + \Phi(h)h\big)\big(g(p) + \Psi(h)h\big)\\ &= f(p)g(p) + \Big(\Phi(h)g(p) + f(p)\Psi(h) + \Phi(h)\Psi(h) \cdot h\Big)h.\end{aligned}$$

Die Funktion $\widetilde{\Phi}(p) := \Phi(h)g(p) + f(p)\Psi(h) + \Phi(h)\Psi(h) \cdot h$ ist im Nullpunkt stetig und nimmt dort den Wert

$$f'(p)g(p) + f(p)g'(p) + f'(p)g'(p) \cdot 0 = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$$

an.

(3) Ist h ausreichend klein, so ist $f(p+h) \neq 0$, denn f ist in p stetig (Lemma V.1.3). In diesem Fall haben wir

$$\frac{1}{f(p+h)} - \frac{1}{f(p)} = \frac{f(p) - f(p+h)}{f(p+h)f(p)} = \left(\frac{-\Phi(h)}{f(p+h)f(p)}\right)h.$$

Da f in p stetig ist, geht der Term in der Klammer für $h \to 0$ gegen $-\frac{f'(p)}{f(p)^2}$. ■

Bemerkung V.1.8. (a) Für die Potenzfunktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ folgt durch Induktion:

$$f_n'(x) = nx^{n-1}.$$

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist $f_0 \equiv 1$ und $f_0' \equiv 0$. Für $n = 1$ wissen wir auch schon, dass $f_1' \equiv 1$ ist, da $f_1(x) = x$ eine lineare Funktion ist.

Induktionsschluss: Mit der Produktregel erhalten wir für $n \geq 1$ aus $f_{n+1} = f_n \cdot f_1$ und der Induktionsvoraussetzung die Formel

$$f_{n+1}'(x) = f_n'(x) \cdot x + f_1'(x) \cdot f_n(x) = nx^{n-1} \cdot x + 1 \cdot x^n = (n+1)x^n.$$

(b) Mit der Linearität der Differentiation (Satz V.1.7(i)) erhält man die Differenzierbarkeit jeder Polynomfunktion $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, wobei die Ableitung gegeben ist durch

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1}.$$

(c) Aus Produkt- und Quotientenregel erhält man die *allgemeine Quotientenregel:* Ist $f(p) \neq 0$ und sind f und g in p differenzierbar, so gilt

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{g(p)^2}.$$

Aus $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$ für $x \in D$ folgt wegen der Produktregel

$$\begin{aligned}\Big(\frac{f}{g}\Big)'(p) &= f'(p)\frac{1}{g(p)} + f(p)\Big(\frac{1}{g}\Big)'(p) = \frac{f'(p)}{g(p)} - \frac{f(p)g'(p)}{g(p)^2} \\ &= \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{g(p)^2}.\end{aligned}$$

■

Kettenregel

Satz V.1.9. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in p differenzierbar und $g : B \to \mathbb{R}$ in $f(p) \in B$ differenzierbar, wobei $B \subseteq f(D)$ ein reelles Intervall mit mehr als einem Punkt ist. Dann ist die Funktion $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in p differenzierbar, und es gilt*

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p).$$

Beweis. Wie im Beweis von Satz V.1.7 haben wir

$$f(p+h) = f(p) + \Phi(h) \cdot h \quad \text{und} \quad g\big(f(p) + h\big) = g(f(p)) + \Psi(h) \cdot h,$$

wobei

$$\lim_{h\to 0} \Phi(h) = \Phi(0) = f'(p) \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0} \Psi(h) = \Psi(0) = g'\big(f(p)\big)$$

ist. Dann ist

$$g(f(p+h)) = g\big(f(p) + \Phi(h)h\big) = g(f(p)) + \Big(\Psi\big(\Phi(h)h\big) \cdot \Phi(h)\Big)h.$$

Nun ist $\lim_{h\to 0} \Phi(h)h = 0$, also

$$\lim_{h\to 0} \Psi(\Phi(h)h) = \Psi(0) = g'(f(p))$$

und daher

$$\lim_{h\to 0} \Psi(\Phi(h)h)\Phi(h) = g'(f(p))f'(p).$$

Damit ist $g \circ f$ in p differenzierbar mit $(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$. ■

Beispiel V.1.10. Man kann auf diese Weise die Ableitung der Funktion $f(x) = (x^3+1)^2$ ausrechnen, ohne auszumultiplizieren: Man setzt $g(x) = x^2$ und $h(x) = x^3+1$. Dann ist $f = g \circ h$, und wir dürfen die Kettenregel anwenden:

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 2h(x) \cdot 3x^2 = 2(x^3+1) \cdot 3x^2. \qquad \blacksquare$$

Wir erinnern uns daran, dass eine stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall genau dann injektiv ist, wenn sie streng monoton ist (Lemma IV.1.20). Darüber hinaus ist $f(D)$ dann ein Intervall (Satz IV.1.17).

Satz über die Umkehrfunktion; differenzierbare Version

Satz V.1.11. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv und in $p \in D$ differenzierbar mit $f'(p) \neq 0$. Dann ist $f^{-1} : f(D) \to D$ in $f(p)$ differenzierbar, und es gilt*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(p)) = \frac{1}{f'(p)}.$$

Beweis. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion (Satz IV.1.21) ist $f(D)$ ein Intervall und $f^{-1} : f(D) \to D$ stetig. Da f injektiv ist, enthält $f(D)$ mehr als einen Punkt, da D mehr als einen Punkt enthält.

Mit Lemma V.1.5 folgt aus der Differenzierbarkeit von f in p die Existenz einer in 0 stetigen Funktion Φ mit $\Phi(0) = f'(p)$ und $f(p+h) = f(p) + \Phi(h)h$ für alle $h \in D - p$. Gemäß der Voraussetzung ist $\Phi(0) \neq 0$ und andererseits ist für $h \neq 0$ zunächst $f(p+h) \neq f(p)$ wegen der Injektivität von f und daher $\Phi(h) = \frac{f(p+h)-f(p)}{h} \neq 0$. Also ist $\Phi(h) \neq 0$ für $0 \neq h \in D - p$.

Sei nun $q := f(p)$ und $h \in f(D) - q$. Dann haben wir zunächst

$$\begin{aligned} q + h &= f\big(f^{-1}(q+h)\big) = f(p) + \Phi\big(f^{-1}(q+h) - p\big)\big(f^{-1}(q+h) - p\big) \\ &= q + \Phi\big(f^{-1}(q+h) - p\big)\big(f^{-1}(q+h) - f^{-1}(q)\big). \end{aligned}$$

Umstellen dieser Gleichung, was wegen $\Phi(f^{-1}(q+h) - p) \neq 0$ möglich ist, führt zu

$$f^{-1}(q+h) - f^{-1}(q) = \frac{1}{\Phi\big(f^{-1}(q+h) - p\big)} \cdot h.$$

Da die Funktion $h \mapsto \frac{1}{\Phi\left(f^{-1}(q+h)-p\right)}$ als Komposition stetiger Funktionen in 0 stetig ist (Satz IV.1.5), folgt aus Lemma V.1.5 zunächst die Differenzierbarkeit von f^{-1} in q, und weiter erhalten wir

$$(f^{-1})'(q) = \frac{1}{\Phi\big(f^{-1}(q) - p\big)} = \frac{1}{\Phi(p-p)} = \frac{1}{f'(p)}. \qquad \blacksquare$$

Die wesentliche neue Erkenntnis von Satz V.1.11 ist, dass die Umkehrfunktion f^{-1} in $f(p)$ differenzierbar ist. Angenommen, wir wüßten das schon. Dann könnten wir ihre Ableitung direkt aus der Kettenregel gewinnen, denn aus $f^{-1}(f(x)) = x$ folgt durch Ableiten in p:

$$(f^{-1})'(f(p))f'(p) = 1.$$

Wir werden später sehen, dass die Voraussetzung der strengen Monotonie insbesondere dann erfüllt ist, wenn $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ gilt.

Beispiel V.1.12. Wir betrachten die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ und ihre Umkehrfunktion $\log :]0,\infty[\to \mathbb{R}$.

(a) Für $p \in \mathbb{R}$ ist $e^{p+h} = e^p e^h$, also $\frac{e^{p+h}-e^p}{h} = e^p \frac{e^h-1}{h}$. Weiter ist

$$\left|\frac{e^h-1}{h} - 1\right| = \left|\frac{e^h-1-h}{h}\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} h^{k-1}\right| \leq |h| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |h|^k = \frac{|h|}{1-|h|} \leq 2|h|,$$

wenn $|h| \leq \frac{1}{2}$ ist. Daher gilt $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$ und folglich

$$\exp'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(p+h)-\exp(p)}{h} = \exp(p) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(p).$$

Wir sehen, dass die Exponentialfunktion überall differenzierbar ist und der *Differentialgleichung*

$$\exp' = \exp$$

genügt.

(b) Mit dem Satz über die Umkehrfunktion V.1.11 folgt jetzt, dass auch der Logarithmus $\log\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ überall differenzierbar ist mit

$$\log'(\exp(p)) = \frac{1}{\exp'(p)} = \frac{1}{\exp(p)}$$

für alle $p \in \mathbb{R}$. Wir haben also für alle $x \in]0,\infty[$ die Beziehung

$$\log'(x) = \frac{1}{x}.$$

Eine Anwendung des Obigen stellt die Berechnung folgenden Grenzwerts dar: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Definition der allgemeinen Potenz liefert die Identität $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(n\log(1+\frac{x}{n}))$. Wir formen den Exponenten um:

$$n\log(1+\frac{x}{n}) = \frac{\log(1+\frac{x}{n})}{\frac{1}{n}} = x \cdot \frac{\log(1+\frac{x}{n}) - \log(1)}{\frac{x}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\log'(1) = x.$$

Durch exponentieren erhalten wir die Formel für die Exponentialfunktion aus Satz III.4.19:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

(c) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Für die Potenzfunktion $p_\alpha :]0,\infty[\to]0,\infty[$, $x \mapsto x^\alpha$ gilt $p_\alpha(x) = e^{\alpha\cdot\log x}$. Um die Kettenregel anwenden zu können, schreiben wir $p_\alpha = \exp\circ g$ mit $g(x) = \alpha\log(x)$. Da die Funktionen $\exp$ und g beide differenzierbar sind, gilt dies nach der Kettenregel auch für deren Komposition p_α. Um die Ableitung von p_α zu berechnen, erinnern wir uns zunächst an $g'(x) = \alpha\frac{1}{x}$. Hiermit erhalten wir schließlich

$$p'_\alpha(x) = \exp'(g(x))g'(x) = \exp(g(x))\alpha\frac{1}{x} = \alpha e^{(\alpha-1)\log x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

für alle $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Sind $g: D \to]0, \infty[$ und $h: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so bilden wir die Funktion

$$f := g^h : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x)^{h(x)}.$$

Wir behaupten, dass f differenzierbar ist mit

$$f' = g^{h-1} \cdot (h' g \log g + h g').$$

In der Tat haben wir $f(x) = e^{h(x) \log g(x)}$. Hieraus folgt sofort die Differenzierbarkeit von f. Für die Ableitung ergibt sich mit der Kettenregel zunächst für die innere Ableitung

$$(h \log g)' = h' \log g + h \frac{g'}{g}$$

und daher

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x)\Big(h'(x) \log g(x) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)}\Big) \\ &= g(x)^{h(x)-1}\big(h'(x) g(x) \log g(x) + h(x) g'(x)\big). \end{aligned}$$

Für $g(x) = x$ und $h(x) = \alpha$ ergibt sich insbesondere die Formel aus (d). Ein anderer interessanter Spezialfall ist $g(x) = h(x) = x$, d.h. $f(x) = x^x$. Für diese Funktion ergibt sich

$$f'(x) = x^{x-1}(x \log x + x) = f(x)(\log x + 1).$$ ■

Bemerkung V.1.13. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ überall differenzierbar, so können wir jedem $p \in D$ eine lineare Abbildung

$$df(p) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ h \mapsto f'(p) \cdot h$$

zuordnen. Diese Abbildung heißt das *Differential von f in p*. Für $f(x) = x$ beispielsweise ist $df(p)(h) = f'(p) \cdot h = 1 \cdot h = h$. Man kann dies sehr salopp auch folgendermaßen schreiben: „ $dx = \mathrm{id}$ “. Damit kann man nun schreiben: $df(p)(h) = f'(p) \cdot h = f'(p)\ dx(p)(h)$, also $df = f' \cdot dx$ oder $\frac{df}{dx} = f'$. Eine Systematisierung dieses Kalküls führt auf den Begriff der Differentialform, den wir in der Analysis II genauer kennenlernen werden. ■

Definition V.1.14. (a) Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig, so heißt f *stetig differenzierbar*. Die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen auf D wird mit $C^1(D)$ bezeichnet.

(b) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *n-mal differenzierbar*, falls f differenzierbar ist und $f' : D \to \mathbb{R}$ mindestens $(n-1)$-mal differenzierbar ist. Wir schreiben $f'' := (f')'$ oder $f^{[2]} := (f')'$ und induktiv $f^{[n]} := (f^{[n-1]})'$. Ist f eine n-mal differenzierbare Funktion, so sind alle Ableitungen $f^{[k]}$, $k < n$, mindestens einmal differenzierbar, insbesondere stetig. Wir nennen f daher *n-mal stetig differenzierbar*, wenn f eine n-mal differenzierbare Funktion ist und $f^{[n]}$ stetig ist. Die Menge der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf D wird mit $C^n(D)$ bezeichnet. Wir schreiben $C^\infty(D) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(D)$ für die Menge der auf D beliebig oft differenzierbaren Funktionen (Die Forderung nach der Stetigkeit der Ableitung ist hier redundant. Warum?). ■

Bemerkung V.1.15. Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion ist nicht immer differenzierbar. Zum Beispiel ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \cdot |x|$ differenzierbar mit $f'(x) = 2|x|$, aber f' ist im Nullpunkt nicht differenzierbar (Beispiel V.1.4). Insbesondere ist $f \in C^1(\mathbb{R}) \setminus C^2(\mathbb{R})$. ■

Aufgaben zu Abschnitt V.1

Aufgabe V.1.1. Sei $\varepsilon > 0$ und $\gamma\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\gamma(0) = 1$, die in 0 differenzierbar ist. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(\frac{t}{n})^n \to e^{t\gamma'(0)}.$$

Welche bekannte Formel erhält man für $\gamma(t) = 1 + tx$? ■

V.2. Das lokale Verhalten von Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir sehen, wie das Verhalten einer differenzierbaren Funktion durch das Verhalten ihrer Ableitung bestimmt wird. So ist etwa eine Funktion mit einer Ableitung, die überall gleich Null ist, konstant. Ist die Ableitung stets nichtnegativ, so ist die Funktion monoton wachsend. Der Schlüssel hierzu ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Wir beginnen mit einem Spezialfall.

Satz V.2.1. (Satz von Rolle) *Seien $a < c$ reelle Zahlen und $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf $]\,a, c\,[$ differenzierbare Funktion. Ist $f(a) = f(c) = 0$, so existiert ein $b \in\,]\,a, c\,[$ mit $f'(b) = 0$.*

Beweis. Ist f konstant, so ist $f'(b) = 0$ für alle $b \in\,]\,a, c\,[$. Ist dies nicht der Fall, so existiert ein $x \in [a, c]$ mit $f(x) \neq 0$. Wie nehmen $f(x) < 0$ an. Den Fall $f(x) > 0$ behandelt man analog. Nach Satz IV.1.12 nimmt die Funktion f ihr Minimum in einem Punkt $b \in [a, c]$ an. Aus $f(b) \leq f(x) < 0$ folgt dann $b \in]a, c[$, so dass f in b differenzierbar ist. Für $b + h \in [a, c]$ gilt dann $f(b + h) \geq f(b)$, also

$$f'(b) = \lim_{h\searrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \geq 0$$

und andererseits

$$f'(b) = \lim_{h\nearrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \leq 0.$$

Hieraus folgt $f'(b) = 0$. ■

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz V.2.2. *Sei $a < c$ und $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf $]a,c[$ differenzierbare Funktion. Dann existiert ein $b \in\,]a,c[$ mit*

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(b).$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $g\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := f(x) - \Big(f(a) + (x-a)\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\Big).$$

Wir ziehen also die affine Funktion ab, deren Graph die beiden Endpunkte $(a, f(a))$ und $(c, f(c))$ des Graphen von f verbindet. Damit ist g stetig auf $[a,c]$ und auf $]a,c[$ differenzierbar. Zusätzlich gelten $g(a) = 0$ und

$$g(c) = f(c) - \Big(f(a) + (c-a)\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\Big) = 0.$$

Nach dem Satz von Rolle existiert daher ein $b \in\,]a,c[$ mit

$$0 = g'(b) = f'(b) - \frac{f(c)-f(a)}{c-a},$$

d.h. $f'(b) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$. ■

Folgerung V.2.3. *Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so gelten:*

(1) *f ist genau dann monoton wachsend (fallend), wenn $f' \geq 0$ ($f' \leq 0$) gilt.*

(2) *f ist genau dann konstant, wenn $f' \equiv 0$ gilt.*

(3) *Ist $f'(x) > 0$ (< 0) für alle $x \in D$, so ist f streng monoton wachsend (fallend). Hiervon gilt die Umkehrung nicht.*

Beweis. (1) Wir zeigen nur die Äquivalenz von $f' \geq 0$ zum monotonen Wachstum von f. Ist f monoton wachsend und $p \in D$, so ist

$$f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(p+h) - f(p)) \geq 0,$$

denn für $h > 0$ ist $f(p+h) \geq f(p)$ und für $h < 0$ ist $f(p+h) \leq f(p)$.

Gilt andererseits $f' \geq 0$ auf D und sind $x, y \in D$ mit $x < y$, so finden wir nach dem Mittelwertsatz V.2.2 ein $z \in\,]x,y[$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(z) \cdot (y-x) \geq 0,$$

d.h., f ist monoton wachsend.

(2) Die Funktion f ist genau dann konstant, wenn f sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend ist. Dies ist nach (1) genau dann der Fall, wenn sowohl $f' \geq 0$ als auch $f' \leq 0$ ist. Dies ist äquivalent zu $f' = 0$.

(3) Gilt $f'(z) > 0$ für alle $z \in D$, so zeigt der Beweis von (1), dass f sogar streng monoton wachsend ist. Ein Beispiel dafür, dass die Umkehrung nicht gilt, ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$, die zwar streng monoton wachsend ist, deren Ableitung im Nullpunkt aber trotzdem gleich Null ist. ■

Folgerung V.2.4. (Eindeutigkeit der Lösung einer Differentialgleichung) *Ist D ein Intervall, $x_0 \in D$ und $c \in \mathbb{R}$, so existiert genau eine differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, die der Differentialgleichung $f' = f$ genügt und in x_0 den Wert c annimmt. Die eindeutige Lösung ist durch $f(x) = ce^{x-x_0}$ gegeben.*

Beweis. Es ist klar, dass die Funktion $f(x) = ce^{x-x_0} = ce^{-x_0}e^x$ eine Lösung der Gleichung $f' = f$ mit $f(x_0) = c$ ist. Damit ist die Existenz bewiesen.

Um die Eindeutigkeit einzusehen, nehmen wir an, dass $g\colon D \to D$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung $g' = g$ mit $g(x_0) = c$ ist. Dann ist die Funktion

$$h\colon D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x)e^{-x}$$

differenzierbar mit

$$h'(x) = g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} = 0.$$

Folglich ist h konstant (Folgerung V.2.3), d.h. $h(x) = h(x_0) = ce^{-x_0}$. Hieraus ergibt sich $g(x) = e^x h(x) = ce^{x-x_0}$. Damit ist die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen. ■

Extremwerte

Definition V.2.5. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Ein Punkt $p \in D$ heißt *lokales Maximum von f*, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f(p) \geq f(x)$ für alle $x \in U_\delta(p) \cap D$ gilt. Ist zusätzlich $f(p) > f(x)$ für alle $x \in (U_\delta(p) \cap D) \setminus \{p\}$, so heißt das Maximum *isoliert.*

(b) Ein Punkt $p \in D$ heißt ein *(isoliertes) lokales Minimum von f*, wenn p ein (isoliertes) lokales Maximum der Funktion $-f$ ist.

(c) Ein Punkt $p \in D$ heißt ein *lokales Extremum*, wenn p ein lokales Maximum oder ein Minimum ist.

(d) Ein Punkt $p \in D$ heißt ein *globales Maximum* bzw. *Minimum*, wenn $f(p) = \max f(D)$ bzw. $f(p) = \min f(D)$ gilt.

(e) f heißt *lokal um p streng monoton wachsend (fallend)*, wenn $f|_{U_\delta(p)\cap D}$ für ein $\delta > 0$ streng monoton wachsend (fallend) ist. ■

$\boxed{\text{Bedingungen für Extremwerte}}$

Lemma V.2.6. *Sei $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gelten:*

(1) *Ist a ein lokales Maximum von f, so ist $f'(a) \leq 0$. Gilt $f'(a) < 0$, so ist a ein isoliertes lokales Maximum.*

(2) *Ist b ein lokales Maximum von f, so ist $f'(b) \geq 0$. Gilt $f'(b) > 0$, so ist b ein isoliertes lokales Maximum.*

(3) *Ist a ein lokales Minimum von f, so ist $f'(a) \geq 0$. Gilt $f'(a) > 0$, so ist a ein isoliertes lokales Minimum.*

(4) *Ist* b *ein lokales Minimum von* f*, so ist* $f'(b) \leq 0$*. Gilt* $f'(b) < 0$*, so ist* a *ein isoliertes lokales Minimum.*

(5) *Ist* $p \in]a,b[$ *ein lokales Extremum von* f*, so ist* $f'(p) = 0$*.*

Beweis. (1)(a) Wir nehmen zuerst an, dass a ein lokales Maximum von f ist. Ist $h > 0$ ausreichend klein, so gilt $f(a+h) \leq f(a)$. Hieraus folgt sofort

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0.$$

(b) Gilt andererseits $0 > f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, so existiert ein $\delta > 0$, so dass $f(a+h) < f(a)$ für $0 < h < \delta$ gilt (Aufgabe IV.1.1(b)). Also ist a ein isoliertes lokales Maximum.

(2)-(4) zeigt man analog zu (1).

(5) Wir nehmen zuerst an, dass p ein Maximum von f ist. Dann ist p auch ein lokales Maximum der Einschränkung $f|_{[a,p]}$ und daher folgt $f'(p) \geq 0$ aus (2). Ebenso ist p ein lokales Maximum der Einschränkung $f|_{[p,b]}$ und wir erhalten $f'(p) \leq 0$ aus (1). Daher ist $f'(p) = 0$.

Ist p ein Minimum, so schließt man analog, indem man (3) und (4) statt (1) und (2) verwendet. ■

Ab jetzt sei $D \subseteq \mathbb{R}$ in diesem Unterabschnitt immer ein nichtleeres *offenes* Intervall, also von der Gestalt $D =]a,b[$, $]a,\infty[$, $]-\infty,a[$ oder $\mathbb{R}$ (Aufgabe V.2.4).

Da in jedem Extremum die Ableitung verschwindet, schauen wir uns diese Punkte etwas genauer an.

Lemma V.2.7. *Ist* f *differenzierbar auf dem offenen Intervall* D *und* $f'(p) = 0$*, so gilt:*

(1) *Existiert ein* $\delta > 0$ *mit* $f'(p+h) \cdot h > 0$ *für alle* $h \neq 0$ *mit* $|h| < \delta$*, so ist* p *ein isoliertes lokales Minimum von* f*. Dies gilt insbesondere, wenn* f' *lokal um* p *streng monoton wächst.*

(2) *Ist* p *ein isoliertes lokales Minimum von* f'*, so wächst* f *lokal um* p *streng monoton.*

Beweis. (1) Ist f' lokal um p streng monoton wachsend, so existiert ein $\delta > 0$, so dass $f'|_{U_\delta(p)}$ streng monoton wachsend ist. Für $0 < h < \delta$ gilt also $f'(p+h) > f'(p) = 0$ und für $-\delta < h < 0$ erhalten wir $f'(p+h) < f'(p) = 0$. Es folgt also $f'(p+h) \cdot h > 0$ für alle h mit $|h| < \delta$.

Sei diese Bedingung erfüllt. Dann ist $f'(p+h) > 0$ für $0 < h < \delta$, also $f|_{[p,p+\delta]}$ streng monoton wachsend (Folgerung V.2.3(3)). Ebenso ist $f'(p+h) < 0$ für $-\delta < h < 0$, also $f|_{[p-\delta,p]}$ streng monoton fallend. Für $x, y \in U_\delta(p)$ mit $x < p < y$ gilt daher $f(x) > f(p) < f(y)$, d.h., p ist ein isoliertes lokales Minimum von f.

(2) Ist p ein isoliertes lokales Minimum von f', so gilt wegen $f'(p) = 0$ die Beziehung $f'(p+h) > 0$ für alle $h \neq 0$ in einer ausreichend kleinen Nullumgebung $U_\delta(0)$. Also sind $f|_{[p,p+\delta]}$ und $f|_{[p-\delta,p]}$ streng monoton wachsend, und somit ist f auf ganz $U_\delta(p)$ streng monoton wachsend (Nachweis!). ■

Bemerkung V.2.8. Der erste Fall in V.2.7 liegt insbesondere dann vor, wenn $f''(p)$ existiert und > 0 ist. Dann folgt aus

$$0 < f''(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(p+h) - f'(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(p+h)}{h}$$

die Existenz eines $\delta > 0$ mit $\frac{f'(p+h)}{h} > 0$ für $0 < |h| < \delta$. Insbesondere ist dann auch $f'(p+h)h = \frac{f'(p+h)}{h}h^2 > 0$. ■

Über das lokale Verhalten

Satz V.2.9. *Sei D offen, $n \geq 2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine $(n-1)$-mal differenzierbare Funktion. Für einen Punkt $p \in D$ existiere auch $f^{[n]}(p)$, und es sei $f^{[n]}(p) \neq 0$ sowie $f^{[k]}(p) = 0$ für alle $0 \leq k < n$. Dann tritt einer der folgenden vier Fälle auf:*

- *n gerade, $f^{[n]}(p) > 0$: Dann ist p ein isoliertes lokales Minimum.*
- *n gerade, $f^{[n]}(p) < 0$: Dann ist p ein isoliertes lokales Maximum.*
- *n ungerade, $f^{[n]}(p) > 0$: Dann wächst f lokal um p streng monoton.*
- *n ungerade, $f^{[n]}(p) < 0$: Dann fällt f lokal um p streng monoton.*

Beweis. Die Fälle mit $f^{[n]}(p) < 0$ führt man durch Multiplikation mit -1 auf die anderen zurück. Wir nehmen daher $f^{[n]}(p) > 0$ an. Nach Voraussetzung ist $\left(f^{[n-2]}\right)''(p) = f^{[n]}(p) > 0$. Wegen Bemerkung V.2.8 und Lemma V.2.7(1) hat $f^{[n-2]}$ in p ein isoliertes lokales Minimum. Ist $n \geq 3$, so folgt aus Lemma V.2.7(2), dass $f^{[n-3]}$ um p lokal streng monoton wächst. Da nach Voraussetzung $f^{[n-3]}(p) = 0$ ist, hat $f^{[n-4]}$ in p ein isoliertes lokales Minimum, falls $n \geq 4$ ist.

Induktiv folgt für $2k \leq n$ bzw. $2k \leq n+1$: $f^{[n-2k]}$ hat in p ein isoliertes lokales Minimum und $f^{[n-2k+1]}$ wächst um p lokal streng monoton. Daraus folgt die Behauptung für $f = f^{[0]}$, wenn $k = \frac{1}{2}n$ bzw. $k = \frac{1}{2}(n+1)$ ist. ■

Bemerkung V.2.10. (a) Der Satz besagt, dass die Funktion f sich lokal um p genauso verhält wie die Funktion $x \mapsto f^{[n]}(p) \cdot (x-p)^n$.

(b) Gilt $f^{[n]}(p) = 0$ für alle n, so lässt sich nichts über das Verhalten von f bei p sagen. Ein Beispiel für eine nichttriviale Funktion mit dieser Eigenschaft ist die folgende:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist mit $f^{[n]}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Aufgabe V.2.3). ■

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse über Extremalstellen noch einmal zusammen.

Bestimmung von Extremwerten (Zusammenfassung):

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(1) Nach Satz IV.1.12 existieren Maxima und Minima von f in $[a,b]$, da f nach Lemma V.1.3 stetig ist. Nach Lemma V.2.6 liegen alle lokalen Extrema in der Menge

$$\{a,b\} \cup \{x \in]a,b[\colon f'(x) = 0\}.$$

(2) Ist $p \in \,]a,b[$ ein lokales Extremum, so gilt $f'(p) = 0$. Dies ist notwendig, aber nicht hinreichend. Ist $f''(p) \neq 0$, so liegt ein isoliertes lokales Extremum vor (Satz V.2.9); es handelt sich um ein Minimum, wenn $f''(p) > 0$ ist und um ein Maximum, wenn $f''(p) < 0$ ist.

(3) Ist a ein lokales Maximum, so ist $f'(a) \leq 0$. Dies ist notwendig, aber nicht hinreichend. Ist $f'(a) < 0$, so ist a ein isoliertes lokales Maximum.

Analoges gilt für b bzw. lokale Minima am Rand (Lemma V.2.6).

Beispiel V.2.11. (a) $f : [1,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ liefert $f'(x) = 2x > 0$ für alle $x \in \,]1,2[$. Daher ist f streng monoton wachsend, folglich lieft bei $p = 1$ ein globales Minimum vor und bei $p = 2$ ein globales Maximum.

(b) Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^3 - x$ auf dem Intervall $[0,2]$. Zuerst such wir nach den Nullstellen der Ableitung. Wegen $f'(x) = 3x^2 - 1$ ergibt sich in dem Intervall $[0,2]$ nur die eine Nullstelle $x_0 := \frac{1}{\sqrt{3}}$. An dieser Stelle ist

$$f''(x_0) = 6x_0 > 0.$$

Also liegt ein isoliertes lokales Minimum vor. An den Intervallrändern haben wir $f'(0) = -1 < 0$ sowie $f'(2) = 3 \cdot 8 - 2 > 0$. Die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ sind also isolierte lokale Maxima. Für die Funktionswerte erhalten wir

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 8 - 2 = 6 \quad \text{und} \quad f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{3} - 1) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} < 0.$$

Also ist x_0 ein globales Minimum und x_2 ein globales Maximum. ■

Aufgaben zu Abschnitt V.2

Aufgabe V.2.1. Beweisen Sie: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $p \in D$. Ist $f|_{D\setminus\{p\}}$ differenzierbar und gilt

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \neq p}} f'(x) = a,$$

so ist f differenzierbar auf D, und es gilt $f'(p) = a$. Hinweis: Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist $\frac{1}{h}\big(f(p+h) - f(p)\big) = f'(p + \vartheta_h \cdot h)$ für ein geeignetes ϑ_h mit $0 < \vartheta_h < 1$. Hieraus schließe man die Differenzierbarkeit in p mit $f'(p) = a$. ■

Aufgabe V.2.2. Ist $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $f'\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ ihre Ableitung, so besitzt f' die Zwischenwerteigenschaft, d.h. ist $f'(x)\leq c\leq f'(y)$ für $x\leq y$, so existiert ein $z\in[x,y]$ mit $f'(z)=c$. Hinweis: Ersetzen wir f durch $f(x)-cx$, so dürfen wir o.B.d.A. $c=0$ annehmen. Weiter dürfen wir $f'(x)<0$ und $f'(y)>0$ annehmen. Ist nun z eine Minimalstelle von f auf dem Intervall $[x,y]$ (Nachweis der Existenz!), so zeige man $f'(z)=0$ (warum liegt kein Minimum am Rand?). ■

Aufgabe V.2.3. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

glatt ist mit $f^{[n]}(0)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. ■

Aufgabe V.2.4. Zeigen Sie: Jedes nichtleere offene Intervall $D\subseteq\mathbb{R}$ ist von der Gestalt $D=]a,b[$, $]a,\infty[$, $]-\infty,a[$ oder $\mathbb{R}$. ■

V.3. Die Regeln von de l'Hospital

In diesem Abschnitt werden wir eine sehr effiziente Methode kennenlernen, um Grenzwerte von Quotienten zweier differenzierbarer Funktionen zu berechnen, die man nicht direkt auswerten kann, da sie vom Typ $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ sind.

Allgemeiner Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz V.3.1. *Seien $a<b$ reelle Zahlen und die Funktionen $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ seien stetig und auf $]\,a,b\,[$ differenzierbar. Dann existiert ein $\xi\in\,]\,a,b\,[$ mit*

$$f'(\xi)\cdot\big(g(b)-g(a)\big)=g'(\xi)\cdot\big(f(b)-f(a)\big).$$

Hat g' keine Nullstelle in $]\,a,b\,[$, so ist $g(b)\neq g(a)$ und

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\ .$$

Beweis. Wir wenden den Satz von Rolle (Satz V.2.1) auf die Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit

$$F(x):=\big(f(x)-f(a)\big)\big(g(b)-g(a)\big)-\big(g(x)-g(a)\big)\big(f(b)-f(a)\big)$$

an. Es gilt $F(a)=F(b)=0$. Also existiert ein $\xi\in\,]\,a,b\,[$ mit

$$0=F'(\xi)=f'(\xi)\cdot\big(g(b)-g(a)\big)-g'(\xi)\big(f(b)-f(a)\big).$$

Ist zusätzlich $g'(x)\neq 0$ für alle $x\in\,]\,a,b\,[$, so folgt $g(b)\neq g(a)$ aus dem Mittelwertsatz. ■

Den allgemeinen Mittelwertsatz wenden wir im Beweis der folgenden Sätze an.

Satz V.3.2. (1. Regel von de l'Hospital) *Seien f und g auf dem Intervall $[a, b]$ stetige und auf $]\,a, b\,[$ differenzierbare Funktionen mit*

$$f(a) = g(a) = 0 \quad \textit{und} \quad g'(x) \neq 0 \quad \textit{für alle } x \in\,]\,a, b\,[.$$

Existiert dann

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \qquad \textit{so existiert auch} \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

und beide Grenzwerte stimmen überein.

Beweis. Der allgemeine Mittelwertsatz liefert zu jedem x ein $\xi_x \in\,]\,a, x\,[$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Hieraus folgt die Behauptung, denn für jede Folge x_n mit $x_n \to a$ gilt auch $\xi_{x_n} \to a$ und daher

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(\xi_{x_n})}{g'(\xi_{x_n})} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel V.3.3. (a) Den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + tx)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{t}{1+tx}}{1} = t$$

dürfen wir den de l'Hospitalschen Regeln berechnen, da die Nennerfunktion $g(x) = x$ der Bedingung $g'(x) = 1$ genügt und $\log(1 + t0) = \log 1 = 0$ ist. Wir erinnern uns daran, dass diese Regel auch die Existenz des Grenzwertes impliziert. Insbesondere erhalten wir hiermit einen neuen Beweis von

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = \lim_{x \to 0} (1 + xt)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{\log(1+tx)}{x}} = e^t.$$

(b) Eine weitere Anwendung der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x) - x + \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{(1+x)^2}}{6x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{(1+x)^3}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Wieder beachten wir, dass wir die Voraussetzungen von V.3.2 bei jeder Anwendung der de l'Hospitalschen Regeln verifizieren müssen. Die Existenz der Grenzwerte folgt dann sukzessive aus der Existenz des allerletzen Grenzwerts.

(c) Und noch eine:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{1} = 0.$$

Den letzten Grenzwert erhalten wir direkt aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion. Das erste Gleichheitszeichen und die Existenz des ersten Grenzwertes folgen aus V.3.2.

(d) Und noch eine:

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{e^x-1}{x^2}=\lim_{x\searrow 0}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{2x}=\infty. \qquad \blacksquare$$

Satz V.3.4. (1. Regel von de l'Hospital für $x\to\infty$) *Seien f und g auf dem Intervall $[a,\infty[$ differenzierbare Funktionen und*

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0 \quad \textit{sowie} \quad g'(x)\neq 0 \quad \textit{für alle} \ \ x\in\,]a,\infty[.$$

Dann ist

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

Beweis. Sei o.B.d.A. $a>0$ (falls nicht, ersetze a durch 1). Wir setzen

$$\widetilde{f}:[0,\tfrac{1}{a}]\to\mathbb{R}, x\mapsto\begin{cases} f(\frac{1}{x}), & \text{falls } x\in\,]0,\frac{1}{a}]\\ 0, & \text{falls } x=0.\end{cases} \quad \text{und} \quad \widetilde{g}:[0,\tfrac{1}{a}]\to\mathbb{R} \text{ analog.}$$

Nach Voraussetzung sind $\widetilde{f}$ und $\widetilde{g}$ stetig und nach Konstruktion auf $]\,0,\frac{1}{a}[$ differenzierbar (Kettenregel). Aus Satz V.3.2 folgt also wegen $\widetilde{f}'(t)=-\frac{1}{t^2}f'(\frac{1}{t})$ für $t>0$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{t\searrow 0}\frac{f'(\frac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2})}=\lim_{t\searrow 0}\frac{\widetilde{f}'(t)}{\widetilde{g}'(t)}=\lim_{t\searrow 0}\frac{\widetilde{f}(t)}{\widetilde{g}(t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)},$$

falls $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert. $\blacksquare$

Satz V.3.5. (2. Regel von de l'Hospital) *Sei $b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Die Funktionen $f,g:[a,b[\,\to\mathbb{R}$ seien differenzierbar mit*

$$\lim_{x\to b}g(x)=\infty \quad \textit{und} \quad g'(x)\neq 0 \quad \textit{für alle} \ \ x\in]a,b[.$$

Dann ist

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert in $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ existiert.

Beweis. 1. Fall $b<\infty$: Wegen $\lim_{x\to b}g(x)=\infty$ existiert ein $\delta>0$ mit $g(x)>0$ für alle $x\in]b-\delta,b[$. Insbesondere ist g nicht monoton fallend, und daher gilt $g'<0$ nicht überall. Da die Ableitung g' die Zwischenwerteigenschaft hat (siehe Aufgabe V.2.2), folgt $g'(x)>0$ auf $]a,b[$ aus der Voraussetzung, dass g' keine Nullstelle besitzt. Wir dürfen also $g>0$ und $g'>0$ annehmen. Wir nehmen zuerst an, dass der Grenzwert $q := \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$ existiert, also weder ∞ noch $-\infty$ ist. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $\delta > 0$, so dass aus $b - \delta < x < b$ die Beziehung $q - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < q + \varepsilon$ folgt. Ist insbesondere $b - \delta < p < x < b$, so erhalten wir nach dem allgemeinen Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz V.3.1)

$$q - \varepsilon < \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} < q + \varepsilon,$$

also $(q-\varepsilon)g(x) + c < f(x) < (q+\varepsilon)g(x) + d$ mit Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$ (Beachte $g(x) > g(p)$ wegen $g' > 0$). Also ist

$$q - \varepsilon + \frac{c}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < q + \varepsilon + \frac{d}{g(x)}.$$

Wegen $g(x) \to \infty$ gilt $\frac{c}{g(x)}, \frac{d}{g(x)} \to 0$ für $x \to b$. Es existiert also ein $\delta' < \delta$ mit $q - 2\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < q + 2\varepsilon$ für $x \in [b - \delta', b[$. Also ist $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = q$, da $\varepsilon > 0$ beliebig war.

Ist $q = \infty$, so erhalten wir zu jedem $R > 0$ in analoger Weise ein $x_R \in \mathbb{R}$, so dass für $x_R < p < x$ gilt:

$$R < \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)}.$$

Hieraus erhalten wir weiter $Rg(x) + c < f(x)$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und somit $R + \frac{c}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)}$, woraus $\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{R}{2}$ für ausreichend große x folgt. Also ist $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = q = \infty$.

Für $q = -\infty$ argumentiert man analog.

2. Fall $b = \infty$: Diesen Fall führt man mit der gleichen Methode aus dem Beweis von Satz V.3.4 auf den Fall $b < \infty$ zurück. ■

Beispiel V.3.6. (a) Seien $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ Polynome vom Grad n mit $b_n > 0$. Dann ist $\lim_{x\to\infty} g^{[k]}(x) = \infty$ für $k = 0, \ldots, n-1$, also

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f^{[n]}(x)}{g^{[n]}(x)} = \frac{a_n}{b_n}.$$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$.

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$. ■

V.4. Trigonometrische Funktionen

In diesem Abschnitt führen wir die trigonometrischen Funktionen mittels der Eulerschen Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

ein. Hieraus leiten wir ihre wichtigsten Eigenschaften wie Periodizität, Reihenentwicklungen und die Additionstheoreme ab.

Wir erinnern uns zunächst an die komplexe Exponentialfunktion

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Definition V.4.1. Wegen $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ für $z \in \mathbb{C}$ (Nachweis!) erhalten wir für $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$. Daher werden durch

$$\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \mathrm{Re}(e^{ix}) \quad \text{(Cosinusfunktion)}$$

und

$$\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \mathrm{Im}(e^{ix}) \quad \text{(Sinusfunktion)}$$

reelle Funktionen auf $\mathbb{R}$ definiert. Definitionsgemäß gilt also die *Eulersche Formel*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Da die Exponentialfunktion gemäß Satz IV.2.13 auf $\mathbb{C}$ stetig ist, sind auch die Funktionen sin und cos stetig.

Da für $x \in \mathbb{R}$ die Eulersche Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ die Zerlegung der komplexen Zahl e^{ix} in Real- und Imaginärteil beschreibt und $|e^{-ix}|^2 = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1$ ist, können wir in der Gaußschen Zahlenebene die Zahl $\cos x$ als die Projektion des Punktes e^{ix} auf die reelle Achse und $\sin x$ als die Projektion des Punktes e^{ix} auf die imaginäre Achse deuten. ■

Lemma V.4.2. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

1. $\cos(-x) = \cos x$ *(*$\cos$ *ist eine ungerade Funktion) und* $\sin(-x) = -\sin x$ *(*$\sin$ *ist ungerade).*
2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
3. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ *(Additionstheorem des Cosinus).*
4. $\sin(x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$ *(Additionstheorem des Sinus).*

Beweis. (1) folgt sofort aus der Definition.

(2) folgt aus

$$1 = |e^{ix}|^2 = \mathrm{Re}(e^{ix})^2 + \mathrm{Im}(e^{ix})^2 = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

(3), (4) Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erhalten wir

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \sin y \cos x).\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun durch Vergleich von Real- und Imaginärteil. ∎

Um nachzuweisen, dass Sinus- und Cosinusfunktion differenzierbar sind und ihre Ableitungen zu berechnen, benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma V.4.3. *Es gelten*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}}} \frac{e^z - 1}{z} = 1. \tag{4.1}$$

Wie in Beispiel V.1.12 erhalten wir für $z \in \mathbb{C}$:

$$\left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| = \left|\frac{e^z - 1 - z}{z}\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k-1}\right| \leq |z| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k = \frac{|z|}{1-|z|} \leq 2|z|,$$

wenn $|z| \leq \frac{1}{2}$ ist. Damit ist (4.1) gezeigt. Für $z = ix$, $x \in \mathbb{R}$, erhalten wir insbesondere

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{e^{ix}-1}{ix} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} - i\frac{\cos x - 1}{x}$$

und hieraus folgt die Behauptung. ∎

Satz V.4.4. *Die Funktionen* $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind beliebig oft differenzierbar und es gilt*

$$\sin' = \cos \quad \textit{und} \quad \cos' = -\sin.$$

Beweis. Mit dem Additionstheorem für die Cosinusfunktion sowie Lemma V.4.3 erhalten wir für $x \in \mathbb{R}$ die Ableitungen

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = -\sin x.\end{aligned}$$

Also ist $\cos$ differenzierbar mit $\cos' = -\sin$.

Analog ergibt sich die Differenzierbarkeit der Sinusfunktion und die Formel $\sin' = \cos$. Hieraus folgt unmittelbar, dass $\sin$ und $\cos$ beliebig oft differenzierbar sind. ∎

Satz V.4.5. (Schwingungsgleichung) *Sei* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine zweimal differenzierbare Funktion, die die Schwingungsgleichung*

$$u'' + u = 0$$

löst. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$

$$u(t) = \alpha \cdot \cos t + \beta \cdot \sin t \quad \textit{für} \quad \alpha = u(0), \beta = u'(0).$$

Beweis. Die Funktion $\widetilde{u} := \alpha \cdot \cos + \beta \cdot \sin$ ist ebenfalls eine Lösung der Schwingungsgleichung mit $\widetilde{u}(0) = u(0)$ und $\widetilde{u}'(0) = u'(0)$. Wir betrachten nun die Differenzfunktionen $U := u - \widetilde{u}$. Dann ist $U(0) = 0$, $U'(0) = 0$, und für die Funktion $E := U^2 + (U')^2$ erhalten wir $E(0) = 0$ sowie

$$E' = 2U \cdot U' + 2U' \cdot U'' = 2UU' - 2U'U = 0.$$

Also ist E konstant. Aus $E(0) = 0$ folgt daher $E = 0$ und folglich $U = 0$. Damit ist $u = \widetilde{u} = \alpha \cdot \cos + \beta \cdot \sin$. ■

Wir haben gerade gesehen, dass die zweimal differenzierbaren Funktionen $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Schwingungsgleichung lösen, einen zweidimensionalen Vektorraum mit der Basis $\{\cos, \sin\}$ bilden. Er ist der Kern der linearen Abbildung

$$C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}), \quad u \mapsto u'' + u.$$

Folgerung V.4.6. *Ist* $0 \neq \omega \in \mathbb{R}$ *und* u *eine Lösung der allgemeinen Schwingungsgleichung*

$$u'' + \omega^2 \cdot u = 0,$$

so ist

$$u(t) = \alpha \cdot \cos(\omega t) + \beta \cdot \sin(\omega t) \quad \textit{für} \quad \alpha = u(0), \beta = \frac{u'(0)}{\omega}.$$

Die Zahl ω heißt *Winkelgeschwindigkeit* der Schwingung.

Beweis. Wir betrachten die Funktion $\widetilde{u}(t) := u(\frac{t}{\omega})$ und sehen, dass $\widetilde{u}$ eine Lösung der Schwingungsgleichung

$$\widetilde{u}''(t) + \widetilde{u}(t) = \tfrac{1}{\omega^2} u''(\tfrac{t}{\omega}) + u(\tfrac{t}{\omega}) = 0$$

ist. Dann ist nach Satz V.4.5 $\widetilde{u}(t) = \alpha \cdot \cos(t) + \beta \cdot \sin(t)$ mit $\alpha = \widetilde{u}(0) = u(0)$ und $\beta = \widetilde{u}'(0) = \frac{u'(0)}{\omega}$. ■

Die Zahl π

Satz V.4.7. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ haben wir folgende Reihendarstellungen von Cosinus- und Sinusfunktion:*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \textit{und} \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Beweis. Aus $i^2 = -1$ erhalten wir $i^3 = -i$ und $i^4 = 1$. Also ist

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n + (-ix)^n}{2n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{1 + (-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Analog erhalten wir

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{1 - (-1)^n}{2i} \frac{x^n}{n!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

■

Folgerung V.4.8. $\cos 2 < 0$.

Beweis. Für $0 < |x| < 3$ und $k \geq 1$ ist

$$\frac{\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}}{\frac{x^{2k}}{(2k)!}} = \frac{x^2}{(2k+2)(2k+1)} \leq \frac{x^2}{4 \cdot 3} \leq \frac{9}{12} < 1.$$

Hieraus folgt, dass die Folge $(\frac{x^{2n}}{(2n)!})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Folglich ist

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^{4m+2}}{(4m+2)!} - \frac{x^{4m+4}}{(4m+4)!}}_{\geq 0} \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

Für $x = 2$ ergibt sich insbesondere $\cos 2 \leq 1 - 2 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0$. ■

Definition V.4.9. Wir definieren

$$\pi := 2 \cdot \inf\{x \geq 0 \colon \cos x = 0\}.$$

Das ist sinnvoll, denn wegen $\cos 0 = 1$ und $\cos 2 < 0$ zeigt uns der Zwischenwertsatz, dass die Cosinusfunktion im Intervall $]0,2[$ eine Nullstelle hat. Es ist klar, dass $\pi < 4$ ist. ■

Satz V.4.10. *$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, d.h. $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.*

Beweis. Aus der Definition von π folgt zunächst die Existenz einer Folge $x_n \in \mathbb{R}$ mit $\cos x_n = 0$ und $x_n \to \frac{\pi}{2}$. Aus der Stetigkeit der Cosinusfunktion folgt daher

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Aus $\cos x > 0$ für $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ folgt aus dem Zwischenwertsatz (Satz IV.1.14) weiter

$$\cos'\frac{\pi}{2} = -\sin\frac{\pi}{2} \leq 0.$$

Wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ gilt andererseits $\sin^2\frac{\pi}{2} = 1$ und daher $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. ■

Wir haben gerade die Identität

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

bewiesen, in der die 5 wichtigsten Zahlen der Analysis $0, 1, \pi, e$ und i vorkommen.

Folgerung V.4.11. (Periodizitätseigenschaften) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:*

(1) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ *(2π-Periodizität).*

(2) $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

(3) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.

Beweis. (1) Wegen Satz V.4.10 erhalten wir aus den Additionstheoremen (Lemma V.4.2)

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x \quad \text{und} \quad \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \tag{4.2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Ersetzen wir x durch $x + \frac{\pi}{2}$, erhalten wir weiter

$$\cos(x + \pi) = -\sin(x + \frac{\pi}{2}) = -\cos x$$

und analog $\sin(x + \pi) = -\sin x$. Damit ist (2) gezeigt. Die Formeln (1) und (3) folgen nun unmittelbar aus (2) und (4.2). ■

Folgerung V.4.12. (Nullstellen)

$$\{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\} = \mathbb{Z}\pi \quad \textit{und} \quad \{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\} = \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi.$$

Beweis. Aus der Definition von π und $\cos x = \cos(-x)$ folgt $\cos x > 0$ für $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und mit Folgerung V.4.11(2) $\cos x < 0$ für $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ sowie $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$. Im Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ sind $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ also die einzigen Nullstellen der Cosinusfunktion. Die Beschreibung der Nullstellenmenge der Cosinusfunktion folgt daher aus der 2π-Periodizität.

Die Nullstellenmenge der Sinusfunktion erhalten wir nun mit Folgerung V.4.11(3). ■

Folgerung V.4.13. $\{z \in \mathbb{C} : e^z = 1\} = 2\pi i\mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = 1$. Wegen $|e^z|^2 = e^z e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2\,\mathrm{Re}\, z} = 1$ ist $\mathrm{Re}\, z = 0$, d.h. $z = ix$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i} = e^{-i\frac{x}{2}}\frac{e^{ix} - 1}{2}$$

ist $e^{ix} = 1$ äquivalent zu $\sin\frac{x}{2} = 0$, d.h. $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ (Folgerung V.4.12). ■

Gemäß der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ist $\exp\colon (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus der additiven Gruppe $\mathbb{C}$ in die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. In Folgerung V.4.13 haben wir den Kern von diesem Gruppenhomomorphismus bestimmt.

Satz V.4.14. (Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen) *Zu jeder komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}^\times$ existiert genau ein $t \in [0, 2\pi[$ mit $z = |z|e^{it}$.*

Beweis. Schreiben wir $\frac{z}{|z|} = a + ib$, so ist $a^2 + b^2 = 1$ und wir suchen ein $t \in [0, 2\pi[$ mit $(\cos t, \sin t) = (a, b)$.

Existenz: Wegen

$$\cos(-t) = \cos t \quad \text{und} \quad \sin(-t) = -\sin(t)$$

sowie

$$\cos(\pi + t) = -\cos(t) \quad \text{und} \quad \sin(\pi + t) = -\sin(t)$$

dürfen wir $a, b \geq 0$ annehmen (Fallunterscheidung nach dem Quadranten in der Ebene, in dem (a, b) liegt). Nun ist $\cos(0) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $0 \leq a \leq 1$, da $a = \sqrt{1 - b^2} \leq 1$ ist. Wegen dem Zwischenwertsatz existiert ein $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $\cos(t) = a$. Dann ist $b = \sqrt{1 - a^2} = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sin t$, da $\sin t \geq 0$ für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ gilt.

Eindeutigkeit: Ist $z = |z|e^{it} = |z|e^{it'}$, so ist $e^{i(t-t')} = e^{it}e^{-it'} = 1$ und daher $t - t' \in 2\pi\mathbb{Z}$ (Folgerung V.4.13). Aus $t, t' \in [0, 2\pi[$ folgt $t = t'$. ■

Die Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen hat den großen Vorteil, dass man mit ihr sehr gut Produkte berechnen kann: Ist $z = |z|e^{i\varphi}$ und $w = |w|e^{i\psi}$, so haben wir

$$zw = |z| \cdot |w|e^{i(\varphi+\psi)} = |zw|e^{i(\varphi+\psi)}.$$

Sind $\varphi, \psi \in [0, 2\pi[$, so kann es natürlich passieren, dass $\varphi + \psi \geq 2\pi$ ist. In diesem Fall ist $e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i(\varphi+\psi-2\pi)}$. Man muß also „modulo 2π“ rechnen.

Folgerung V.4.15. (n-te Einheitswurzeln) *Die Gleichung $z^n = 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen. Sie sind gegeben durch*

$$\{e^{\frac{k}{n}2\pi i} \colon k = 0, \ldots, n-1\}.$$

Beweis. Es ist klar, dass $(e^{\frac{k}{n}2\pi i})^n = e^{k2\pi i} = 1$ ist. Ist nun $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$, so ist $|z|^n = |z^n| = 1$. Es existiert also ein $\varphi \in [0, 2\pi[$ mit $z = e^{i\varphi}$ (Satz V.4.14). Aus $1 = z^n = e^{in\varphi}$ erhalten wir $n\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$ (Folgerung V.4.13). Also existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n\varphi = 2\pi k$. Aus $\varphi \in [0, 2\pi[$ folgt nun $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. ∎

Mehr über trigonometrische Funktionen

Bemerkung V.4.16. (Tangens und Arcustangens) Auf $D := \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$ definieren wir die *Tangensfunktion*

$$\tan \colon D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Eigenschaften (für alle $x \in D$):

(1) $\tan(x + \pi) = \tan x$ (Folgerung V.4.11(2)).

(2) $\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$: Nach der Quotientenregel ist

$$\tan' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}.$$

Wegen $1 + \tan^2(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2(x)}$ genügt die Tangensfunktion also der Differentialgleichung

$$f'(x) = 1 + f(x)^2, \quad x \in D.$$

(3) $\tan x \tan(\frac{\pi}{2} - x) = 1$ (Folgerung V.4.11).

(4) $\tan_0 \colon] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ ist bijektiv: Wegen (2) ist die Funktion streng monoton wachsend, also injektiv. Da tan stetig ist, ist das Bild ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Mit (3) erhalten wir

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan_0 x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan_0(\frac{\pi}{2} - x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} = \infty$$

und somit $[0, \infty[\subseteq I$. Aus $\tan_0(-x) = \tan_0 x$ für alle x erhalten wir schließlich $I = \mathbb{R}$.

(5) Mit (4) und dem Satz über die Umkehrfunktion (Satz V.1.11) erhalten wir eine differenzierbare Funktion

$$\arctan := \tan_0^{-1} \colon \mathbb{R} \to] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Dann ist $\arctan(0) = 0$ und

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan_0'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan_0^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Diese Eigenschaft wird später in der Integralrechnung noch eine wichtige Rolle spielen. ∎

Bemerkung V.4.17. (a) Da die Cosinusfunktion $\cos_0 := \cos|_{[0,\pi]}$ auf $]0,\pi[$ die negative Ableitung $-\sin$ besitzt, ist $\cos_0$ streng monoton fallend, also injektiv mit dem Bild $[\cos(\pi), \cos(0)] = [-1, 1]$. Die Umkehrfunktion

$$\arccos := \cos_0^{-1} \colon [-1, 1] \to [0, \pi]$$

heißt *Arcuscosinusfunktion*. Sie ist ebenfalls streng monoton fallend und in $]-1, 1[$ differenzierbar mit der Ableitung

$$\begin{aligned}\arccos'(x) &= \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

(b) Da die Sinusfunktion $\sin_0 := \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ die positive Ableitung $\cos$ besitzt, ist $\sin_0$ streng monoton wachsend, also injektiv mit dem Bild $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion

$$\arcsin := \sin_0^{-1} \colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

heißt *Arcussinusfunktion*. Wegen Folgerung V.4.11 ist $\sin_0(x) = \cos_0(\frac{\pi}{2} - x)$ und daher

$$\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x).$$

Insbesondere ist

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel V.4.18. (a) Zunächst beachten wir, dass

$$\lim_{x\to\infty} \cos x$$

nicht exitiert, da die Folge $\cos(n\pi) = (-1)^n$ nicht konvergiert. Hieraus erhalten wir sofort, dass

$$\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$$

ebenfalls nicht existiert.

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist in allen Punkten $x \neq 0$ differenzierbar, da Kompositionen differenzierbarer Funktionen differenzierbar sind. Im Nullpunkt ergibt sich aus $|f(x)| \leq |x|$ sofort

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Also ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Allerdings ist f in 0 nicht differenzierbar, denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \cos\frac{1}{h}$$

existiert nicht (siehe (a)).

(c) (Eine differenzierbare Funktion deren Ableitung unstetig ist) Wir betrachten die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Für $x\neq 0$ ist

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \frac{x^2}{x^2}\cos\frac{1}{x} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Für $x=0$ ist

$$\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x)) = \frac{f(h)}{h} = \frac{1}{h}h^2\sin\frac{1}{h} = h\cdot\sin\frac{1}{h}.$$

Wegen $\left|\sin\frac{1}{h}\right|\leq 1$ ist also $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$, d.h. $f'(0)=0$ existiert. Damit ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x=0\\ 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$$

Für $x_n := \frac{1}{2\pi n}$ ist

$$f'(x_n) = f'(\frac{1}{2\pi n}) = \frac{2}{2\pi n}\sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) = -1 \neq 0 = f'(0).$$

Damit ist f' im Nullpunkt unstetig. Die Funktion f ist also ein Beispiel für eine differenzierbare Funktion deren Ableitung unstetig ist. ■

Bemerkung V.4.19. Die Folge $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin(n^2x)$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion, denn es gilt

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \sup\{|f_n(x)| : x\in\mathbb{R}\} = \frac{1}{n}\to 0.$$

Andererseits divergiert die Folge ${f_n}'(x) = n\cdot\cos(n^2x)$. Selbst gleichmäßige Konvergenz zieht also offensichtlich nicht notwendigerweise die Konvergenz der Folge der Ableitungen nach sich. ■