IV. Stetigkeit

IV.1. Stetige Funktionen

Stetige Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind vielen sicher schon aus der Schule bekannt. Dort erwirbt man sich die „naive" Vorstellung, dass eine stetige Funktion eine Funktion ist, deren Graphen man ohne Absetzen des Stiftes durchzeichnen kann. Bevor wir uns der Thematik detailliert zuwenden, wollen wir einige Beispiele von Funktionen betrachten.

(1) Die Funktion $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = x^2$ ist eine stetige Funktion.

(2) Die Funktion $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = [x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \colon k \leq x\}$ ($[x]$ wird als *Gaußklammer* bezeichnet) ist stückweise konstant und an allen $x \in \mathbb{Z}$ unstetig.

(3) Die *Sägezahnfunktion* $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_3(x) = x - [x]$ ist ebenfalls an allen ganzen x unstetig.

(4) Die Funktion

$$f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } |x| \geq 1 \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } \frac{1}{n} \leq |x| < \frac{1}{n-1},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

ist in allen Zahlen der Form $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}$, unstetig aber stetig in 0.

Die Idee hinter dem Begriff der Stetigkeit ist, dass sich der Funktionswert der Funktion nur wenig ändern darf, wenn sich das Argument nur wenig ändert. So ändert sich der Funktionswert von f_2 um 1, wenn man etwa vom Argument $x = 1$ nur ein Tausendstel abzieht; im Verhältnis zur Änderung des Arguments ändert sich der Funktionswert sehr stark. Diese Funktion soll an diesen Punkten also nicht als stetig gelten. Die formale Definition sieht folgendermaßen aus. Sie ist eine der wichtigsten Definitionen der Analysis überhaupt.

Definition IV.1.1. (a) Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

(1) *stetig in* $p \in X$, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X) \quad d_X(x,p) < \delta \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon;$$

und

(2) *stetig,* wenn sie an jedem Punkt $p \in X$ stetig ist.

(b) Für eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ergeben sich die folgenden Definitionen:

(1) f ist *stetig in* $p \in X$, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad |x - p| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

gilt.

(2) f ist *stetig,* wenn f in jedem Punkt $p \in X$ stetig ist. ■

Beispiel IV.1.2. (a) Ist (X, d) ein metrischer Raum und $p \in X$ ein Punkt, so ist die Abstandsfunktion

$$f_p : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(x, p)$$

stetig.

Zunächst erhalten wir durch zweimaliges Anwenden der Dreiecksungleichung:

$$|f_p(x) - f_p(y)| = |d(x, p) - d(y, p)| \leq d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ (vgl. Aufgabe III.1.1). Sei nun $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Mit $\delta = \varepsilon$ erhalten wir für $d(x, y) < \delta$ die Beziehung

$$|f_p(x) - f_p(y)| < \varepsilon.$$

Also ist die Funktion f_p stetig in jedem Punkt $x \in X$.

(b) Aus (a) folgt insbesondere, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, f(z) := |z|$ stetig ist, denn $|z| = d(z, 0)$. ■

Damit wir besser mit diesem neuen Begriff umgehen können, geben wir mehrere Formulierungen der Stetigkeitsbedingung an.

Satz IV.1.3. *Für eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen den metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) sind äquivalent:*

(1) *f ist stetig in $p \in X$.*

(2) $(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists \delta > 0)\, f(U_\delta(p)) \subseteq U_\varepsilon(f(p))$.

(3) (Folgenkriterium) *Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \to p$ gilt $f(x_n) \to f(p)$.*

Beweis. (1) ⇒ (2): Da f in p stetig ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$d_X(x, p) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Dies bedeutet $x \in U_\delta(p) \Longrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(p))$ bzw. $f(U_\delta(p)) \subseteq U_\varepsilon(f(p))$.

(2) ⇒ (3): Es gelte $x_n \to p$ in X. Wir zeigen $f(x_n) \to f(p)$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(p)) \subseteq U_\varepsilon(f(p))$. Sei nun $N_\delta \in \mathbb{N}$ mit $d_X(x_n, p) < \delta$ für alle $n \geq N_\delta$. Dann ist $x_n \in U_\delta(p)$, also $f(x_n) \in U_\varepsilon(f(p))$ für alle $n \geq N_\delta$. Daher gilt $f(x_n) \to f(p)$.

(3) $\Rightarrow$ (1): (indirekter Beweis) Wir nehmen an, f sei in $p \in X$ unstetig. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für kein $\delta > 0$ gilt:

$$d_X(x,p) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Es existiert also für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Punkt $x_n \in X$ mit $d_X(x_n, p) < \frac{1}{n}$ und $d_Y(f(x_n), f(p)) \geq \varepsilon$. Damit gilt $x_n \to p$ und $f(x_n) \not\to f(p)$. Hiermit ist die Behauptung bewiesen. ∎

Wir erinnern uns daran, dass wir eine Teilmenge U eines metrischen Raumes offen nennen, wenn für jedes $p \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq U$ existiert. Mit diesem Begriff können wir eine sehr einfache abstrakte Charakterisierung der Stetigkeit angeben.

STETIGKEIT UND OFFENE MENGEN

Satz IV.1.4. *Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen den metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) ist genau dann stetig, wenn für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei f stetig und $V \subseteq Y$ offen. Wir zeigen, dass $f^{-1}(V)$ offen ist. Sei dazu $p \in f^{-1}(V)$. Dann ist $f(p) \in V$, und wegen der Offenheit von V existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon\big(f(p)\big) \subseteq V$. Nach dem vorigen Satz existiert ein $\delta > 0$ mit $f\big(U_\delta(p)\big) \subseteq U_\varepsilon\big(f(p)\big) \subseteq V$, also $U_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V)$. Wir haben damit gezeigt, dass die Menge $f^{-1}(V)$ zu jedem Punkte p eine δ-Umgebung von p enthält, d.h., $f^{-1}(V)$ ist offen.

„$\Leftarrow$“: Seien nun Urbilder offener Teilmengen von Y wieder offen und $p \in X$. Wir zeigen die Stetigkeit von f in p. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann ist $U_\varepsilon(f(p))$ eine offene Menge, die $f(p)$ enthält (Lemma III.1.6). Daher ist $f^{-1}(U_\varepsilon(f(p))) \subseteq X$ offen. Da p in dieser Menge enthalten ist, finden wir ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(p) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(p)))$, d.h. mit $f(U_\delta(p)) \subseteq U_\varepsilon(f(p))$. Also ist f nach dem vorigen Satz in p stetig. ∎

Satz IV.1.5. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume. Sind die Funktionen $f : X \to Y$ bzw. $g : Y \to Z$ in p bzw. in $f(p)$ stetig, so ist die Funktion $g \circ f : X \to Z$ in p stetig.*

Beweis. Um dies zu zeigen, verwenden wir das Folgenkriterium aus Satz IV.1.3(3) Sei $x_n \to p$ in X. Da f in p stetig ist, gilt $f(x_n) \to f(p)$. Da g in $f(p)$ stetig ist, gilt

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(p)).$$

Also ist $g \circ f$ in p stetig. ∎

Folgerung IV.1.6. *Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Funktionen zwischen metrischen Räumen, so ist die Komposition $g \circ f : X \to Z$ stetig.* ∎

Satz IV.1.7. *Die Funktionen $f, g : X \to \mathbb{C}$ seien in $p \in X$ stetig.*

(1) *Für alle Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ sind die Funktionen $\lambda f + \mu g$ und $f \cdot g$ in p stetig.*

(2) *Ist $f(p) \neq 0$, so ist auch die Funktion $\frac{1}{f} : X \setminus f^{-1}(0) \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ stetig in p.*

Beweis. Wegen dem Folgenkriterium für die Stetigkeit in p (Satz IV.1.3(3)) folgen alle Behauptungen aus den Grenzwertsätzen für Folgen; als Beispiel sei der Beweis für die Stetigkeit von fg angegeben: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \to p$. Dann gelten, da f und g in p stetig sind, $f(x_n) \to f(p)$ und $g(x_n) \to g(p)$. Nach dem Satz über den Grenzwert des Produkts zweier konvergenter Folgen gilt dann auch $f(x_n)g(x_n) \to f(p)g(p)$. ■

Wir vermeiden an dieser Stelle die Schreibweise f^{-1} für die Funktion $\frac{1}{f}$, um Verwechslungen mit einer Umkehrfunktion im Sinne von Satz I.3.6 vorzubeugen.

Beispiel IV.1.8. (Beispiele stetiger Funktionen)
(1) Die *identische Abbildung* $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto x$ ist stetig, denn für alle $\varepsilon > 0$ kann man $\delta = \varepsilon$ wählen. Aus $|x - p| < \delta$ folgt dann $|f(x) - f(p)| = |x - p| < \varepsilon$.
(2) Die *konstante Funktion:* Für jedes $c \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto c$ stetig (hier ist $\delta > 0$ beliebig).
(3) Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Gestalt $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ heißt *Polynomfunktion* oder *Polynom*. Ist $a_k \neq 0$, so nennt man k den *Grad des Polynoms* f. Mit Satz IV.1.7 und (1), (2) erhalten wir induktiv die Stetigkeit aller Polynomfunktionen.
(4) *Rationale Funktionen:* Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynomfunktionen und $D := \{z \in \mathbb{C} : g(z) \neq 0\}$. Dann ist die Funktion

$$\frac{f}{g} : D \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$$

stetig. Beispielsweise ist die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$ stetig. ■

Satz IV.1.9. *Ein Polynom vom Grad n besitzt höchstens n Nullstellen.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach dem Grad des Polynoms. Ist der Grad 1, so ist die Behauptung trivial. Sei $n > 1$ und $g(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ein Polynom vom Grad n sowie z_0 eine Nullstelle von g. Mit

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0 + z_0)^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} z_0^{k-j} (z - z_0)^j \\ &= \sum_{j=0}^n \Big(\sum_{k=j}^n a_k \binom{k}{j} z_0^{k-j} \Big) (z - z_0)^j \end{aligned}$$

erhalten wir eine Darstellung von g als

$$g(z) = \sum_{j=0}^n b_j (z - z_0)^j.$$

Nun ist

$$0 = g(z_0) = \sum_{j=0}^{n} b_j(z_0 - z_0)^j = b_0.$$

Also ist $g(z) = (z - z_0)\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}(z - z_0)^j$. Da der zweite Faktor nach Induktionsvoraussetzung höchstens $n - 1$ Nullstellen besitzt, sehen wir, dass g höchstens n Nullstellen besitzt. ■

Um den Umgang mit der Stetigkeit von Funktionen zu erleichtern, ist der folgende Konvergenzbegriff für Funktionen sehr nützlich.

Definition IV.1.10. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $p \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und es existiere mindestens eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Wir schreiben

$$\lim_{x\to p} f(x) = a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

falls für jede solche Folge $f(x_n) \to a$ gilt.

Wir schreiben

$$\lim_{x\nearrow p} f(x) = a \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to p-} f(x) = a,$$

falls $f(x_n) \to a$ für alle Folgen in $D \cap]-\infty, p[$ mit $x_n \to p$ gilt (*linksseitiger Grenzwert von f in p*). Analog schreibt man

$$\lim_{x\searrow p} f(x) = a \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to p+} f(x) = a,$$

wenn $f(x_n) \to a$ für alle Folgen in $D \cap]p, \infty[$ mit $x_n \to p$ gilt (*rechtsseitiger Grenzwert von f in p*). ■

Aus dem Folgenkriterium für die Stetigkeit (Satz IV.1.3(3)) folgt sofort, dass die Stetigkeit im Punkt $p \in D$ äquivalent ist zu

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p).$$

Andererseits behaupten wir, dass für den Fall, dass $p \in D$ ist, folgende Äquivalenz gilt:

$$\lim_{x\to p} f(x) = a \iff f(p) = a \quad \wedge \quad \lim_{x\nearrow p} f(x) = a \quad \wedge \quad \lim_{x\searrow p} f(x) = a.$$

In der Tat ist "$\Rightarrow$" trivial. Für "$\Leftarrow$" müssen wir zeigen, dass unter Voraussetzung der drei Bedingungen auf der rechten Seite für jede Folge $x_n \to p$ die Beziehung $f(x_n) \to a$ gilt. Ist dies nicht der Fall, so existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass die Menge $M_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |f(x_n) - a| \geq \varepsilon\}$ unendlich ist. Dann ist eine der beiden Mengen

$$\{n \in M_\varepsilon : x_n < p\} \quad \text{oder} \quad \{n \in M_\varepsilon : x_n > p\}$$

unendlich, und dies führt direkt zu einem Widerspruch zu einer der Aussagen auf der rechten Seite.

Beispiel IV.1.11. (a) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto [x]$ gilt $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ für alle $p \notin \mathbb{Z}$. Für $p \in \mathbb{Z}$ haben wir $\lim_{x \nearrow p} f(x) = p - 1 \neq f(p)$ und $\lim_{x \searrow p} f(x) = p$. Also ist diese Funktion genau dann in $p \in \mathbb{R}$ stetig, wenn $p \notin \mathbb{Z}$ ist.

(b) Sei $m \in \mathbb{N}$. Für $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^m}$, gilt $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, denn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \to \infty$ gilt $\frac{1}{x_n} \to 0$ und daher auch $f(x_n) = \left(\frac{1}{x_n}\right)^m \to 0$. ■

Aufgaben zu Abschnitt IV.1

Aufgabe IV.1.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Ist f monoton wachsend und $p \neq \min D$, so existiert der linksseitige Grenzwert $\lim_{x \nearrow p} f(x)$. Ist $p \neq \max D$, so existiert der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \searrow p} f(x)$ und es gilt

$$\lim_{x \nearrow p} f(x) \leq \lim_{x \searrow p} f(x).$$

Die Funktion ist in $p \in D$ mit $\min D \neq p \neq \max D$ genau dann stetig, wenn $\lim_{x \nearrow p} f(x) = \lim_{x \searrow p} f(x)$ gilt.

(b) Sei $p \in \mathbb{R}$ und es existiere mindestens eine Folge in D, die gegen p konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{x \to p} f(x) = a$$

genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$(\forall x \in D) \quad |x - p| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - a| < \varepsilon$$

gilt.

(c) Sei $p = \infty$ und D nicht nach oben beschränkt. Dann gilt

$$\lim_{x \to p} f(x) = a$$

genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$(\forall x \in D) \quad x > R \quad \Rightarrow \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$ ■

Eigenschaften stetiger Funktionen

Wir lernen in diesem Abschnitt einige Sätze über stetige Funktionen kennen, die wir in der Analysis II in einer sehr allgemeinen Form wiedersehen werden. Sie sind insbesondere für viele Anwendungen wichtig, da sie oft Existenzaussagen für die Lösungen von Gleichungen liefern.

Satz vom Maximum

Satz IV.1.12. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt, d.h., die Bildmenge $f([a, b]) \subseteq \mathbb{R}$ ist beschränkt, und f nimmt ein Minimum und ein Maximum an.*

Beweis. Sei $M := \sup f([a, b]) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Aus der Definition des Supremums folgt nun die Existenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a, b]$ mit $f(x_n) \to M$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Aus $a \leq x_{n_k} \leq b$ folgt $a \leq x \leq b$, und aus der Stetigkeit von f folgt $f(x_{n_k}) \to f(x)$. Hieraus folgt $M = f(x) < \infty$ und daher $M = \max f([a, b])$.

Für $m := \inf f([a, b])$ argumentiert man analog. ■

Etwas griffiger formuliert besagt Satz IV.1.12, dass jede stetige Funktion auf einem **abgeschlossenen, beschränkten** Intervall ein Maximum und ein Minimum annimmt.

Beispiel IV.1.13. (a) Die Funktion $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht beschränkt. Für Intervalle der Gestalt $]a, b]$ gilt der Satz IV.1.12 also nicht.

(b) Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - x^5$ nimmt auf $[0, 1]$ ein Maximum an. Können Sie diese Stelle berechnen? ■

Zwischenwertsatz

Satz IV.1.14. *Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. $f(a) < f(b)$ annehmen, denn für $f(a) = f(b)$ ist die Behauptung trivial, und für $f(a) > f(b)$ beweist man sie analog. Sei also $f(a) < c < f(b)$. Wir haben die Existenz eines $p \in [a, b]$ mit $f(p) = c$ nachzuweisen. Sei dazu $p := \sup\{x \in [a, b] : f(x) \leq c\}$. Wir behaupten, dass $f(p) = c$ gilt.

Aus der Definition von p folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Existenz eines Elements $x_n \in [a, p]$ mit $x_n > p - \frac{1}{n}$ und $f(x_n) \leq c$ (vgl. Lemma II.2.14). Wegen $x_n \in [p - \frac{1}{n}, p]$ gilt $x_n \to p$, und wegen der Stetigkeit von f ist $f(p) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq c$. Insbesondere ist $p < b$. Ist $f(p) < c$, so existiert wegen der Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, so dass $f(x) < c$ für alle $x \in [a, b]$ mit $|x - p| < \delta$ gilt. Für jedes $p' \in]x, b[$ mit $|p' - p| < \delta$ ist dann $f(p') < c$, im Widerspruch zur Definition von p. Also gilt $f(p) = c$. ■

Beispiel IV.1.15. Die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + x - 1$ hat eine Nullstelle. Denn da $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = 1 > 0$ ist, liefert der Zwischenwertsatz die Existenz einer Zahl $x \in [0, 1]$ mit $f(x) = 0$, also $x^3 + x = 1$.

Hieraus folgt insbesondere, dass der Zwischenwertsatz nicht gilt, wenn man als Definitionsmenge Teilmengen der rationalen Zahlen betrachtet; die rationalen Zahlen haben „zuviele Löcher“. ■

Satz IV.1.16. *Jede Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungeraden Grades besitzt eine reelle Nullstelle.*

Beweis. Sei $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ mit ungeradem n und $a_n \neq 0$. Dann können wir nach Division von f durch a_n annehmen, dass $a_n = 1$ ist, d.h., wir haben

$$f(x) = x^n \cdot \Big(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\Big)$$

für alle $x \neq 0$. Nun ist $\lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n} = 1$ (vgl. Beispiel IV.1.11). Daher finden wir ein $x_1 < 0$ mit $1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \ldots + \frac{a_0}{x_1^n} > 0$ und ein $x_2 > 0$ mit $1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \ldots + \frac{a_0}{x_2^n} > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x_1) &= x_1^n(1 + \tfrac{a_{n-1}}{x_1} + \ldots + \tfrac{a_0}{x_1^n}) < 0 \quad \text{und} \\ f(x_2) &= x_2^n(1 + \tfrac{a_{n-1}}{x_2} + \ldots + \tfrac{a_0}{x_2^n}) > 0. \end{aligned}$$

Folglich existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_3 \in]x_1, x_2[$ mit $f(x_3) = 0$. ■

Man beachte, dass es sehr wohl reelle Polynome geraden Grades gibt, die keine reelle Nullstelle haben; als Beispiel sei $f(x) = x^2 + 1$ genannt (vgl. Bemerkung II.2.5).

Satz IV.1.17. (Intervalleigenschaft stetiger Funktionen) *Das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Abbildung ist wieder ein Intervall, d.h., ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(I)$ ein Intervall.*

Beweis. Seien $x, y \in f(I)$. Dann existieren $a, b \in I$ mit $f(a) = x$ und $f(b) = y$. Nach dem Zwischenwertsatz ist $[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b]) \subseteq f(I)$, d.h., $f(I)$ ist ein Intervall. ■

Definition IV.1.18. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ ein Funktion. Dann heißt f

(1) *monoton wachsend*, wenn $x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$
(2) *streng monoton wachsend*, wenn $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$
(3) *monoton fallend*, wenn $x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$
(4) *streng monoton fallend*, wenn $x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$

jeweils für alle $x, y \in D$ gilt.

Die Funktion f heißt *monoton*, falls f monoton wachsend oder fallend ist, und *streng monoton*, wenn f streng monoton wachsend oder fallend ist. ■

Beispiel IV.1.19. Die Funktion

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ -1 - x & \text{für } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

ist injektiv, aber nicht streng monoton. Das folgende Lemma zeigt, dass so etwas für stetige Funktionen auf Intervallen nicht vorkommt. ■

Lemma IV.1.20. *Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f genau dann injektiv, wenn f streng monoton ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Ist f streng monoton und $x \neq y$ in I, so ist $f(x) < f(y)$ oder $f(x) > f(y)$, in jedem Fall also $f(x) \neq f(y)$ und damit f injektiv.

„$\Leftarrow$“: Sei f injektiv. Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen dazu an, dass f nicht streng monoton ist. Dann existieren Zahlen $x_1 < y_1$ in I mit $f(x_1) > f(y_1)$ und $x_2 < y_2$ in I mit $f(x_2) < f(y_2)$ (denn $f(x_1) \neq f(y_1)$ und $f(x_2) \neq f(y_2)$ folgt jeweils aus der Injektivität). Nun betrachten wir die Funktion

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \ t \mapsto f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(ty_1 + (1-t)y_2),$$

die als Zusammensetzung stetiger Funktionen wieder stetig ist (Folgerung IV.1.6). Es ist $g(0) = f(x_2) - f(y_2) < 0$ und $g(1) = f(x_1) - f(y_1) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $t \in]0,1[$ mit $g(t) = 0$, d.h., für $x_3 := tx_1 + (1-t)x_2$ und $y_3 := ty_1 + (1-t)y_2$ gilt $f(x_3) = f(y_3)$. Nun ist $tx_1 < ty_1$ und $(1-t)x_2 < (1-t)y_2$, so dass auch $x_3 < y_3$ gilt. Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität von f. ∎

Satz über die Umkehrfunktion

Satz IV.1.21. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Dann ist $D := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, die Funktion f ist streng monoton und besitzt eine streng monotone* **stetige** *Umkehrfunktion $f^{-1} : D \to I \subseteq \mathbb{R}$.*

Beweis. Wegen Satz IV.1.17 und Lemma IV.1.20 ist D ein Intervall und f streng monoton. Wir nehmen an, dass f streng monoton wachsend ist. Den anderen Fall behandelt man analog. Sei $f^{-1} : D \to I$ die Umkehrfunktion.

f^{-1} ist streng monoton: Sei $x < y$ in D. Dann existieren $a, b \in I$ mit $f(a) = x$ und $f(b) = y$. Da f streng monoton wachsend ist, gilt $a < b$ (andernfalls erhalten wir einen Widerspruch). Daher ist

$$f^{-1}(x) = a < b = f^{-1}(y),$$

also auch f^{-1} streng monoton wachsend.

f^{-1} ist stetig: Sei $q \in D$ und $\varepsilon > 0$. Wir zeigen die Existenz eines $\delta > 0$ mit

$$(\forall y \in D, y < q) \ |y - q| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(q)| < \varepsilon.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: $q = \min D$. Dann existiert kein $y \in D$ mit $y < q$ und es ist daher nichts zu zeigen.

Fall 2: $q \neq \min D$. Dannn existiert ein $x \in I$ mit $x \in]f^{-1}(q) - \varepsilon, f^{-1}(q)[$. Dann ist $f(x) < q$ und wir setzen $\delta := q - f(x)$. Für $y < q$ und $|y - q| < \delta$ ist dann $y \in]f(x), q[$ und daher $f^{-1}(y) \in]x, f^{-1}(q)[\subseteq]f^{-1}(q) - \varepsilon, f^{-1}(q)[$. Insbesondere ist also $|f^{-1}(q) - f^{-1}(y)| < \varepsilon$.

Analog zeigt man die Existenz eines $\delta > 0$ mit

$$(\forall y \in D, y > q) \quad |y - q| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(q)| < \varepsilon$$

und erhält so die Stetigkeit von f^{-1} in q. ∎

Beispiel IV.1.22. (a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Potenzfunktion

$$f : [0,\infty[\to [0,\infty[,\ x \mapsto x^n,$$

stetig und streng monoton, denn für $x \geq 0$ und $h > 0$ folgt aus dem Binomischen Lehrsatz

$$f(x+h) = (x+h)^n \geq x^n + h^n > x^n = f(x).$$

Da f stetig ist, ist das Bild $f([0,\infty[) \subseteq [0,\infty[$ ein Intervall, das $0 = f(0)$ enthält. Andererseits ist $f(m) = m^n \geq m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Also ist dieses Intervall unbeschränkt und stimmt daher mit $[0,\infty[$ überein. Wir haben mit dem Zwischenwertsatz also ein neues Argument (das ist inzwischen das dritte!) für die Existenz n-ter Wurzeln aus positiven Zahlen erhalten.

Aus Satz IV.1.21 folgt nun die **Stetigkeit der Wurzelfunktion**

$$f^{-1} : [0,\infty[\to [0,\infty[,\ x \mapsto x^{1/n} = \sqrt[n]{x}.$$

(b) Für alle $q \in \mathbb{Q}_+$ ist die Funktion $[0,\infty[\to [0,\infty[,\ x \mapsto x^q$ stetig, denn schreibt man $q = \frac{n}{m}$, so gilt $x^q = (x^{1/m})^n$, was eine Komposition stetiger Funktionen ist.

(c) Für alle $q \in \mathbb{Q}$ ist $]0,\infty[\to]0,\infty[,\ x \mapsto x^q$ stetig.

(d) Ist n ungerade, so ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ streng monoton und bijektiv, denn für $y < 0$ ist $f(-\sqrt[n]{-y}) = -(-y) = y$. Hieraus folgt, dass die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist. In diesem Fall setzen wir auch für $x < 0$:

$$x^{\frac{1}{n}} := f^{-1}(x).$$ ■

Gleichmäßige Stetigkeit

Wir erinnern noch einmal an die Definition der Stetigkeit von Funktionen. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig, falls

$$(\forall p \in D)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D) \quad |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Beachtenswert hierbei ist die Tatsache, dass δ von p abhängen darf. Im allgemeinen wird man für verschiedene Punkte p verschiedene Werte für δ nehmen müssen, um die Stetigkeit zu zeigen.

Beispiel IV.1.23. Als Beispiel betrachten wir die folgende stetige Funktion:

$$f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Dann haben wir

$$|f(x) - f(p)| = |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{p}| = \tfrac{|x-p|}{xp}.$$

Ist $p \in]0,\infty[$, so gilt für $x = \frac{p}{2}$ die Beziehung $\frac{|x-p|}{xp} = \frac{p/2}{p^2/2} = \frac{1}{p}$. Da dieser Ausdruck beliebig groß wird, sehen wir, dass es zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ kein universelles $\delta > 0$ gibt. Man muß δ also in Abhängigkeit von p wählen. ■

Definition IV.1.24. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall p, x \in D) \quad |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Wir beachten, dass hier die Zahl δ nicht von p abhängt, was sich aus der **Reihenfolge der Quantoren** ergibt. ■

Satz IV.1.25. *Sind $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir führen einen indirekten Beweis. Ist f nicht gleichmäßig stetig, so existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für kein $\delta > 0$ gilt:

$$\forall x, p \in [a, b] : |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Insbesondere existieren zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, p_n \in [a, b]$ mit $|x_n - p_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(p_n)| \geq \varepsilon$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in [a, b]$ konvergiert. Wegen $|x_n - p_n| < \frac{1}{n}$ gilt dann auch $p_{n_k} \to x$. Damit folgt $|f(x_{n_k}) - f(p_{n_k})| \to |f(x) - f(x)| = 0$, was der Annahme $|f(x_{n_k}) - f(p_{n_k})| \geq \varepsilon$ widerspricht. ■

Aufgabe IV.1.2. Bestimme alle abgeschlossenen Teilintervalle $I \subseteq]0, \infty[$, auf denen die Funktion $f(x) := \frac{1}{x}$ gleichmäßig stetig ist. Zeige insbesondere, dass dies auf $]0, 1]$ nicht der Fall ist. ■

IV.2. Folgen und Reihen von Funktionen

Sei D eine Menge. Sind $f_n : D \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, Funktionen, so heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Folge von Funktionen auf D*.

Definition IV.2.1. Die Funktionenfolge $f_n : D \to \mathbb{C}$ *konvergiert punktweise gegen* $f : D \to \mathbb{C}$, wenn für jedes $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. ■

Beispiel IV.2.2.

(a) $D = \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{für } \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > \frac{2}{n}. \end{cases}$

Für $x \leq 0$ ist damit $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2}{n_0} < x$. Für $n > n_0$ ist dann auch $f_n(x) = 0$. Also gilt $f_n(x) \to 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. $f_n \to 0$ punktweise.

(b) Punktweise Grenzwerte stetiger Funktionen sind im allgemeinen nicht stetig. Wir betrachten dazu die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + |nx|} = \begin{cases} \frac{nx}{1+nx}, & \text{falls } x \geq 0 \\ \frac{nx}{1-nx}, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Die Funktionen f_n sind allesamt stetig, da $1 + |nx| > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Für $x > 0$ gilt $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} = \frac{x}{\frac{1}{n}+x} \to \frac{x}{x} = 1$. Für $x = 0$ ist $f_n(x) = 0$, also $f_n(0) \to 0$. Für $x < 0$ schließlich ist $f_n(x) = \frac{nx}{1-nx} = \frac{x}{\frac{1}{n}-x} \to \frac{x}{-x} = -1$. Definiert man nun die *Signumfunktion*

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

so gilt $f_n \to \operatorname{sgn}$ punktweise, aber die Signumfunktion ist offensichtlich nicht stetig.

(c) Sei $D = [0,1]$ und $f_n(x) = x^n$. Dann ist

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ 0, & \text{falls } x \in [0,1[, \end{cases}$$

das heißt, die Grenzfunktion f ist in 1 unstetig. ■

Man kann an diesen Beispielen sehen, dass der punktweise Konvergenzbegriff tatsächlich den Nachteil hat, dass sich die Stetigkeit der Funktionen der Folge nicht auf die Grenzfunktion überträgt. Wir führen nun einen stärkeren Konvergenzbegriff ein, der diesen Defekt nicht aufweist.

Definition IV.2.3. (Gleichmäßige Konvergenz) Die Funktionenfolge $f_n : D \to \mathbb{C}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen $f : D \to \mathbb{C}$, wenn gilt:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon > 0)\,(\forall n > N_\varepsilon)\,(\forall x \in D)\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Man schreibt dann auch $f_n \Longrightarrow f$ auf D. ■

Zum Vergleich sei noch einmal die Definition der punktweisen Konvergenz angegeben:

$$(\forall x \in D)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon > 0)\,(\forall n > N_\varepsilon)\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(man beachte die Reihenfolge der Quantoren!). Hier kann N_ε noch von x abhängen; was im Falle der gleichmäßigen Konvergenz nicht der Fall ist. Man kann sich den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz so vorstellen, dass man um den Graphen der Funktion f einen „ε-Schlauch“

$$S_\varepsilon(f) = \{(x,y) \in D \times \mathbb{C} \colon |y - f(x)| < \varepsilon\}$$

legt, und dass im Falle der gleichmäßigen Konvergenz dann ab einem gewissen N_ε alle Funktionen f_n der Folge *vollständig* innerhalb dieses Schlauchs liegen müssen. Bei der punktweisen Konvergenz kann man dies nicht immer erreichen (betrachte beispielsweise in Beispiel IV.2.2(c) den Wert $\varepsilon = \frac{1}{2}$). Um mit dem

Begriff der gleichmäßigen Konvergenz besser umgehen zu können, definieren wir die *Supremumsnorm* von f auf D durch

$$\|f\|_D := \sup\{|f(x)| : x \in D\} \in [0, \infty].$$

Dann ist $\|f\|_D \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn f auf D beschränkt ist. In diesem Sinne schreiben wir

$$B(D) := \{f \colon D \to \mathbb{C} \colon \|f\|_D < \infty\}$$

für die Menge der *beschränkten Funktionen auf der Menge* D. Ist es klar, auf welchen Definitionsbereich wir uns beziehen, so schreiben wir auch kurz $\|f\|$ anstatt $\|f\|_D$. Die Supremumsnorm hat folgende Eigenschaften:

Satz IV.2.4. (Normeigenschaften der Supremumsnorm) *Für* $f, g \in B(D)$ *gilt:*

(N1) $\|0\| = 0$ *und* $\|f\| > 0$ *für* $f \neq 0$.

(N2) *Für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$ *gilt* $\|\lambda \cdot f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ *(positive Homogenität).*

(N3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (*Subadditivität*).

Beweis. (N1) ist klar. Für (N2) rechnen wir

$$\begin{aligned}\|\lambda \cdot f\| &= \sup\{|\lambda \cdot f(x)| : x \in D\} = \sup\{|\lambda| \cdot |f(x)| : x \in D\} \\ &= |\lambda| \cdot \sup\{|f(x)| : x \in D\} = |\lambda| \cdot \|f\|.\end{aligned}$$

(N3) Für alle $x \in D$ ist $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$, also auch $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. ∎

Hinter diesen Eigenschaften steht ein allgemeines Konzept:

Definition IV.2.5. Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum. Eine Funktion

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

heißt *Norm*, wenn sie die Eigenschaften (N1), (N2) und (N3) hat. Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt dann ein *normierter Raum.* ∎

Beispiel IV.2.6. Für eine Menge D ist $(B(D), \|\cdot\|)$ ein normierter Raum (Satz IV.2.4). ∎

Lemma IV.2.7. *Ist* $(V, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum, so ist*

$$d : V \times V \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

eine Metrik, d.h., (V, d) *ist ein metrischer Raum.*

Beweis. Wir weisen die Eigenschaften (M1), (M2) und (M3) einer Metrik nach (vgl. Definition III.1.2).

(M1) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow \|x - y\| = 0 \overset{\text{(N1)}}{\Longleftrightarrow} x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(M2) (Symmetrie) $d(x, y) = \|x - y\| \overset{\text{(N2)}}{=} |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$.

(M3) (Dreiecksungleichung) $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \overset{\text{(N3)}}{\leq} \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$. ∎

Es sei bemerkt, dass dies genau derselbe Beweis ist wie für den normierten Raum $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

Satz IV.2.8. *Sei D eine Menge.*

(a) *Sind die Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ beschränkt und gilt $f_n \Longrightarrow f$, so ist f beschränkt, d.h., die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen ist beschränkt.*

(b) *Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in dem metrischen Raum $(B(D), d)$ konvergiert genau dann, wenn die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf D gleichmäßig konvergiert.*

Beweis. (a) Sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt $\|f_n - f\|_D < 1$. Dann ist $\|f\|_D = \|f - f_N + f_N\|_D \leq \|f - f_N\|_D + \|f_N\|_D \leq 1 + \|f_N\|_D < \infty$, und folglich $f \in B(D)$.

(b) Wegen (a) folgt $f \in B(D)$ aus $f_n \Longrightarrow f, f_n \in B(D)$. Gleichmäßige Konvergenz bedeutet, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so existiert, dass für $n > N_\varepsilon$ gilt:

$$(\forall x \in D) \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

d.h. $d(f, f_n) = \|f - f_n\|_D \leq \varepsilon$. Das bedeutet aber, dass $f_n \to f$ im metrischen Raum $(B(D), d)$ mit $d(f, g) = \|f - g\|_D$ gilt. ■

Wir übertragen nun einige Konvergenzkriterien von Zahlenfolgen auf Funktionenfolgen.

Definition IV.2.9. Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *Banachraum*, wenn V bezüglich der Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ vollständig ist, d.h. wenn jede Cauchy-Folge in V konvergiert. ■

Wir erinnern uns daran, dass wir in Satz III.2.32 und Folgerung III.2.33 gesehen haben, dass $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ Banachräume sind.

Cauchykriterium für Funktionenfolgen

Satz IV.2.10. *Ist D eine Menge, so ist der metrische Raum $(B(D), d)$ vollständig, d.h. eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkter Funktionen konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion $f \in B(D)$, wenn sie in $\big(B(D), d\big)$ eine Cauchy-Folge ist, d.h.*

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\, (\forall n, m \geq N_\varepsilon)\ \|f_n - f_m\|_D < \varepsilon.$$

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $B(D)$, d.h.

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\, (\forall n, m \geq N_\varepsilon)\ \|f_n - f_m\|_D < \varepsilon.$$

Insbesondere gilt dann für alle $x \in D$: $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, d.h. $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, also konvergent (Folgerung III.2.23). Wir definieren $f : D \to \mathbb{C}$ durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Für $m > N_\varepsilon$ gilt dann

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon,$$

also $\|f - f_m\|_D \leq \varepsilon$, d.h. $f_m \Longrightarrow f$. Nach Satz IV.2.8 ist f beschränkt, d.h. $f \in B(D)$, und es gilt $f_n \to f$ in $B(D)$. Also ist $B(D)$ ein vollständiger metrischer Raum. ■

Die Begriffe der Konvergenz von Funktionenfolgen übertragen sich natürlich auch auf Reihen von Funktionen: Damit ist klar, was die punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ bedeutet.

Satz IV.2.11. (Konvergenzsatz von Weierstraß) *Ist* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *eine Reihe beschränkter Funktionen* $f_n : D \to \mathbb{C}$, *für die* $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_D$ *konvergiert, so konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *auf* D *gleichmäßig gegen eine Funktion* $F : D \to \mathbb{C}$.

Beweis. Sei $F_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$. Für $n < m$ gilt dann

$$\|F_m - F_n\|_D = \Big\| \sum_{k=n+1}^{m} f_k \Big\|_D \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_D.$$

Da die reelle Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_D$ konvergiert, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_ε mit $\sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_D < \varepsilon$ für alle $n, m > N_\varepsilon, n \leq m$. Also ist $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $B(D)$ und somit nach Satz IV.2.10 konvergent. ■

Soweit haben wir uns mit der gleichmäßigen Konvergenz abstrakter Funktionen auf einer beliebigen Menge D beschäftigt. Motiviert ist dieser Begriffsapparat unter anderem durch folgenden Satz:

STETIGKEIT GLEICHMÄSSIGER GRENZWERTE

Satz IV.2.12. *Sei* (D, d) *ein metrischer Raum und* $f_n : D \to \mathbb{C}$ *eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmässig gegen* $f : D \to \mathbb{C}$ *konvergiert. Dann ist* f *stetig, d.h., ein gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist stetig.*

Beweis. Sei $p \in D$. Wir zeigen, dass f in p stetig ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen $f_n \Longrightarrow f$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_N\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da f_N stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $|f_N(x) - f_N(p)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in D$ mit $d(x,p) < \delta$. Damit ist für $d(x,p) < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(p)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(p) + f_N(p) - f(p)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(p)| + |f_N(p) - f(p)| \\ &\leq \|f - f_N\|_D + \frac{\varepsilon}{3} + \|f_N - f\|_D < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist f in p stetig. Da p beliebig war, ist f stetig. ■

Satz IV.2.13. (Eigenschaften der Exponentialfunktion)

(1) *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ *ist stetig.*

(2) $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ *ist stetig, bijektiv und streng monoton wachsend.*

(3) *Die Logarithmusfunktion*

$$\log := \exp^{-1} :]0, \infty[\to \mathbb{R}$$

ist stetig, bijektiv und streng monoton wachsend.

Beweis. (1) Sei dazu $D := U_R(0) \subseteq \mathbb{C}$ die offene Kreisscheibe vom Radius R um 0 und $f_n(z) := \frac{z^n}{n!}$. Für jedes $z \in U_R(0)$ ist dann $|f_n(z)| = \frac{|z|^n}{n!} \leq \frac{R^n}{n!}$ und daher $\|f_n\|_{U_R(0)} \leq \frac{R^n}{n!}$. Also ist $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{U_R(0)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!} = e^R < \infty$. Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß IV.2.11 konvergiert damit die

Funktionenfolge $F_n := \sum_{k=0}^n f_k$ gleichmäßig auf $U_R(0)$. Ferner ist jedes $F_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ eine Polynomfunktion und somit stetig (Beispiel IV.1.8). Aus Satz IV.2.12 folgt damit die Stetigkeit von $\exp|_{U_R(0)}$. Da R beliebig war, ist exp auf ganz $\mathbb{C}$ stetig (vgl. Aufgabe IV.3(b)).

(2) Da die Exponentialfunktion wegen (1) insbesondere auf $\mathbb{R}$ stetig ist, ist $\exp(\mathbb{R})$ ein Intervall (Satz IV.1.17). Für $x > 0$ ist $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots > 1$, also $e^{nx} = (e^x)^n \to \infty$ und somit $[1, \infty[\subseteq \exp(\mathbb{R})$. Für $x < 0$ ist $e^x = \frac{1}{e^{-x}} < 1$ und folglich $e^{nx} \to 0$. Damit folgt $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$ (vgl. Satz III.4.18).

Für $x < y$ ist $e^{y-x} > 1$ und daher $e^y = e^{x+(y-x)} = e^x e^{y-x} > e^x$. Also ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend.

(3) Dies folgt aus (2) und dem Satz IV.1.21 über die Umkehrfunktion. ∎

Man findet auch die Bezeichnung $\log(x) = \ln(x)$ für die Logarithmusfunktion.

Beispiel IV.2.14. (Die *allgemeine Potenzfunktion:*) Für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $x > 0$ definieren wir

$$x^\alpha := e^{\alpha \log x},$$

die sogenannte allgemeine Potenzfunktion. Ist $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, so ist

$$x^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n} \log x} = \left(e^{\frac{1}{n} \log x}\right)^m = \sqrt[n]{e^{\log x}}^{\,m} = \sqrt[n]{x}^{\,m}.$$

Die neue Definition ist also für $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit der alten konsistent.

(a) Die Funktion $]0, \infty[\to \mathbb{C}, x \mapsto x^\alpha$ ist stetig, denn sie ist eine Komposition stetiger Funktionen; definiert man $m_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, y \mapsto \alpha \cdot y$, so ist $x^\alpha = (\exp \circ m_\alpha \circ \log)(x)$.

(b) Für $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$ ist die Potenzfunktion streng monoton wachsend (fallend); dies folgt aus der strengen Monotonie von exp und log.

(c) Es gelten

$$x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta} \quad \text{und} \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \cdot \beta}.$$

Hierzu rechnet man $x^\alpha x^\beta = e^{\alpha \log x} e^{\beta \log x} = e^{(\alpha+\beta) \log x} = x^{\alpha+\beta}$ und $(x^\alpha)^\beta = e^{\beta \log x^\alpha} = e^{\beta(\alpha \log x)} = x^{\alpha\beta}$.

(d) Für eine relle Zahl $\alpha \neq 0$ ist die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^\alpha,]0, \infty[\to]0, \infty[$ durch $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ gegeben.

(e) Für $\alpha \geq 0$ lässt sich die Potenzfunktion $]0, \infty[\to]0, \infty[, x \mapsto x^\alpha$ stetig auf $[0, \infty[$ fortsetzen. ∎

Potenzreihen

Definition IV.2.15. Eine *Potenzreihe mit Entwicklungspunkt* p ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-p)^k,$$

wobei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen ist, die man die *Koeffizienten der Potenzreihe* nennt. ■

Bemerkung IV.2.16. (a) Ist $D := \{z \in \mathbb{C} \colon \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-p)^k \text{ konvergent}\}$, so wird durch die Zuordnung

$$f : D \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-p)^k$$

eine Funktion auf D definiert. Es gilt immer $p \in D$ und $f(p) = a_0$, aber D muß nicht mehr als einen Punkt enthalten. Ist

$$R = \sup\Big\{r \in [0,\infty[\colon \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n < \infty\Big\}$$

der Konvergenzradius der Potenzreihe (Satz III.4.13), so konvergiert die Potenzreihe für $|z-p| < R$, und für $|z-p| > R$ liegt Divergenz vor, d.h.

$$U_R(p) \subseteq D \subseteq \{z \in \mathbb{C} \colon |z-p| \leq R\}$$

gilt.

(b) Setzen wir $h := x-p$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k h^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-p)^k$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0. Im wesentlichen reicht es also aus, Potenzreihen der Gestalt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ zu betrachten. ■

Satz IV.2.17. *Ist R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-p)^k$ und $r < R$, so konvergiert diese Potenzreihe auf $U_r(p)$ absolut und gleichmäßig. Die Funktion*

$$f \colon U_R(p) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-p)^k$$

ist stetig.

Beweis. Sei $r_1 \in]r, R[$. Für $|z-p| \leq r$ haben wir dann

$$|a_n (z-p)|^n \leq |a_n| r^n = (|a_n| r_1^n)\Big(\frac{r}{r_1}\Big)^n \leq C\Big(\frac{r}{r_1}\Big)^n$$

für ein $C > 0$, denn aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r_1^k$ folgt die Beschränktheit der Folge $(a_k r_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Für $f_n(z) := a_n(z-p)^n$ ist also $\|f_n\|_{U_r(p)} \leq C\left(\frac{r}{r_1}\right)^n$. Damit erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{U_r(p)} \leq C \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n = \frac{C}{1-\frac{r}{r_1}} < \infty.$$

Die erste Behauptung folgt nun aus dem Konvergenzsatz von Weierstraß IV.2.11.

Hieraus erhalten wir wegen Satz IV.2.12 die Stetigkeit von f auf allen Kreisscheiben der Gestalt $U_r(p)$, $r < R$. Die Stetigkeit von f folgt nun aus Aufgabe IV.2.2(b). ■

Beispiel IV.2.18. (a) Für die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist $R = 1$ und der Konvergenzbereich

$$D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}.$$

Auf diesem Bereich konvergiert die geometrische Reihe gegen die Funktion

$$f \colon D \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{1-z}.$$

Man beachte, dass sich die Funktion f natürlich auf den viel größeren Bereich $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortsetzen lässt, obwohl die geometrische Reihe z.B. für $z = 2$ nicht konvergiert.

(b) Für die Reihe

$$1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \frac{z^3}{4} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1}$$

ist $a_k = \frac{1}{k+1}$, und es gilt

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1,$$

denn $\sqrt[k]{k} \to 1$ und

$$\sqrt[k]{k} \leq \sqrt[k]{k+1} \leq \sqrt[k]{2k} = \sqrt[k]{2}\sqrt[k]{k} \to 1 \cdot 1 = 1.$$

(Lemma III.4.10). Daher ist nach der Hadamardschen Formel $R = 1$ (Satz III.4.13(2)). Für $z = 1$ ergibt sich die harmonische Reihe, von der wir wissen, dass sie divergiert; für $z = -1$ ergibt sich die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$, die nach dem Leibnizkriterium konvergiert.

(c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ konvergiert für alle z mit $|z| \leq 1$; andererseits folgt $R = 1$ aus

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n^2}\right)^{-1} = 1$$

(Formel von Hadamard). Wir können also am Konvergenzradius nicht ablesen, ob am Rande des Konvergenzbereichs Konvergenz oder Divergenz vorliegt. Erst die detaillierte Betrachtung der Randpunkte ergibt in diesem Fall den Konvergenzbereich

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

(d) Die Reihe

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}$$

divergiert für $|x| \geq 1$, obwohl die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Betrachtet man dagegen auch komplexe Zahlen, so stellt man fest, dass die Funktion $\frac{1}{1+z^2}$ im Komplexen sehr wohl eine Singularität bei $z = \pm i$ besitzt. Im Komplexen würde man also gar nicht erwarten, dass der Konvergenzkreis größeren Radius hat.

Der interessante Zusammenhang zwischen der Darstellung reeller Funktionen duch Potenzreihen und deren Verhalten im Komplexen gehört zu einem der faszinierendsten Bereiche der Analysis. Dieses Zusammenspiel werden wir in der Funktionentheorie genauer kennenlernen. Insbesondere wird dort gezeigt werden, dass die Größe des Konvergenzkreises einer Potenzreihe immer genau der Abstand zur nächstliegenden Singulartität der ins Komplexe fortgesetzen Funktion ist. ■

Aufgaben zu Abschnitt IV.2

Aufgabe IV.2.1. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(a) Ist $Z \subseteq X$ eine Teilmenge, die wir als metrischen Raum auffassen, und f stetig, so ist $f|_Z\colon Z \to Y$ stetig.

(b) Ist $U \subseteq Y$ eine Teilmenge mit $f(X) \subseteq U$, so ist die Funktion $f^U\colon X \to U, x \mapsto f(x)$ ebenfalls stetig (sie heißt Koeinschränkung von f auf U), wenn wir $d_U(x,y) := d_Y(x,y)$ definieren, d.h., wenn wir U als metrischen Teilraum von Y auffassen. ■

Aufgabe IV.2.2. Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion zwischen metrischen Räumen. Dann gilt:

(a) Ist $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und sind alle U_i offen und f auf den U_i stetig, so ist f stetig.

(b) Besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x auf der f stetig ist, so ist f stetig. ■

Aufgabe IV.2.3. Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion zwischen metrischen Räumen. Dann gilt:

(a) f ist genau dann stetig, wenn die Urbilder aller abgeschlossenen Teilmenge $F \subseteq Y$ in X abgeschlossen sind.

(b) Ist $X = \bigcup_{i\in 1}^{n} F_i$ und sind alle F_i abgeschlossen und f auf den F_i stetig, so ist f stetig. Hinweis: (a) ■

Aufgabe IV.2.4. (Konvergenzsatz von Weierstraß) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine Reihe in einem Banachraum X, für die $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ konvergiert, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ in X. ■