Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
18.7.2007

14. Übungsblatt zur „Analysis I für M, LaG und Ph"

Aufgaben und Lösungen

Gruppenübung

Aufgabe G47 (Komplexe Zahlenebene)

Zeichne die folgenden Zahlen in die komplexe Zahlenebene ein:

(a) $z_1 := e^{i\pi}$

(b) $z_2 := e^{i\cdot\frac{-\pi}{2}}$

(c) $z_3 := 4 \cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{6}}$

(d) $z_4 := 3 \cdot e^{i\cdot\frac{5}{8}\cdot 2\pi}$

(e) $z_5 := \sqrt{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$

(f) $z_6 := e^{i}$

(g) $z_7 := e^{-2}$

(Hinweis: Diese Aufgabe hat gewisse Ähnlichkeiten mit der Aufgabe (T42) vom letzten Tutoriumsblatt. Wer diese Aufgabe dort gut bearbeitet hat, kann diese hier überspringen. Zusätzlicher Hinweis zur (f): Der Winkel 1 im Bogenmaß entspricht $\left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ \approx 57.2957795^\circ$ im Gradmaß, da $1^\circ := \frac{2\pi}{360}$ ein 360tel des Vollkreises ist.)

Lösung: Diese Lösung enthält nicht die geforderten Skizzen, ich gebe stattdessen aber an, wie weit der zu zeichnende Punkt vom Urpsrung entfernt ist (=Betrag der komplexen Zahl) und in welchem Winkel über der positiven x-Achse der Punkt zu suchen ist (=Winkel der Zahl)

(a) $e^{i\pi}$ hat Betrag 1 und Winkel $\pi = 180^\circ$,
die Zahl liegt also auf der negativen reellen Achse und hat Betrag 1, also ist $e^{i\pi} = -1$.

(b) $e^{i\cdot\frac{-\pi}{2}}$ hat ebenfalls Betrag 1 und den (negativen) Winkel $-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$ über der x-Achse, d.h. 270° über der x-Achse.
d.h. die Zahl ist der Schnittpunkt des Einheitskreises mit der negativen imaginären Achse, also ist $e^{i\cdot\frac{-\pi}{2}} = -i$.

(c) $4 \cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{6}}$ hat Betrag 4 und Winkel $\frac{2\pi}{6} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

(d) $3 \cdot e^{i\cdot\frac{5}{8}\cdot 2\pi}$ hat Betrag 3 und Winkel $\frac{5}{8} \cdot 2\pi = \frac{5}{8} \cdot 360^\circ = 225^\circ$.

(e) $\sqrt{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$ hat Betrag $\sqrt{2}$ und Winkel $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$.
Der Zahl entspricht also der Schnittpunkt der 1. Winkelhalbierenden mit dem Kreis um die 0 mit Radius $\sqrt{2}$. Die Skizze legt nahe, dass dies gerade die komplexe Zahl $1 + i$ ist.

(f) e^i hat Betrag 1 und Winkel 1, d.h. $1 = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ \approx 57.2957795^\circ$.
Die komplexe Zahl e^i liegt also auf dem Einheitskreis mit einem Winkel über der positiven reellen Achse von ungefähr(!) 60°.

(g) e^{-2} ist eine positive reelle Zahl und hat deshalb Betrag e^{-2} und Winkel $0 = 0^\circ$. Die Zahl liegt also auf der positiven reellen Achse bei $e^{-2} \approx 0.135335283$.

Aufgabe G48 (Sinus und Cosinus)

(a) Zeige mit den Additionstheoremen die folgende Formeln:

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbb{R}) \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ (\forall x \in \mathbb{R}) \cos(2x) &= 2 (\cos x)^2 - 1\end{aligned}$$

(b) Berechne mit geschicktem Kombinieren der beiden Formeln „$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$" und „$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$" die Werte von $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ und $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Was ist $e^{i\frac{\pi}{4}}$?

Lösung:

(a) Lemma V.4.2(d), das Additionstheorem des Sinus, besagt:

$$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$$

Setzen wir nun $x = y$, so erhalten wir:

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \cos(x)\sin(x) + \sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x),$$

was zu zeigen war.
Lemma V.4.2(c), das Additionstheorem des Cosinus, besagt:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\cos(y)$$

Im Spezialfall $x = y$ erhalten wir:

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\cos(x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2$$

Nun gilt aber nach Lemma V.4.2(b), dass $(\sin(x))^2 = 1 - (\cos(x))^2$ und somit gilt:

$$\cos(2x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = (\cos(x))^2 - \left(1 - (\cos(x))^2\right) = 2(\cos(x))^2 - 1.$$

(b) Setzen wir in den beiden Gleichungen

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \text{und} \qquad (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

für x den Wert $\frac{\pi}{4}$ ein, so erhalten wir:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \qquad \text{und} \qquad (\sin\frac{\pi}{4})^2 + (\cos\frac{\pi}{4})^2 = 1$$

Die erste Gleichung ergibt: $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$. Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt dies:

$$2(\sin\frac{\pi}{4})^2 = 1$$

Also ist $\sin\frac{\pi}{4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Da aber der Sinus auf dem Intervall $]0, \pi[$ positiv ist, muss $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sein. Und da Cosinus und Sinus an dieser Stelle übereinstimmen, ergibt sich auch $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und schließlich:

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Aufgabe G49 (Sinc-Funktion)

Der *Kardinalsinus* ist eine Funktion, die folgendermaßen definiert ist:

$$\operatorname{sinc} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

(a) Zeige, dass die Funktion differenzierbar ist und berechne die Ableitung.

(b) Finde die Nullstellen der Funktion sinc und berechne die Grenzwerte $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sinc}(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sinc}(x)$.

(c) Skizziere grob den Graphen der Funktion sinc. (Eine Kurvendiskussion inklusive Extremwertberechnung wird schwierig und ist deshalb nicht gefordert.)

Lösung:

(a) Für alle $x \neq 0$ ist die Funktion sinc Quotient von zwei differenzierbaren Funktion und somit differenzierbar (Quotientenregel) mit der Ableitung:

$$(\forall x \neq 0) f'(x) = \frac{\sin'(x) \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

Die Stelle 0 muss gesondert betrachtet werden. Hier zeigen wir die Differenzierbarkeit mit der Defintion der Ableitung, mit dem Differenzenquotienten (Definition V.1.2):

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sinc}(0+h) - \operatorname{sinc}(0)}{h} &= \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} \\ &= \frac{\sin h - h}{h^2}. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Grenzwert für $h \to 0$. Hierbei gehen leider Zählen und Nenner gegen 0, sodass wir die L'Hospital-Regel verwenden müssen:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sinc}(0+h) - \operatorname{sinc}(0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h - h}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h - 0}{2} \\ &= \frac{-\sin(0) - 0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, dass wir zweimal die Hospital-Regel angewandt haben und jeweils die Existenz des letzteren Grenzwertes die Existenz des vorherigen impliziert hat.

Alternative Lösung: Satz V.4.7 gibt eine Möglichkeit, die Sinus-Funktion als Potenzreihe darzustellen (Potenzreihen sind üblicherweise die Alternativen zur L'Hospital-Regel):

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Dies können wir benutzen, um den obigen Grenzwert zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sinc}(0+h)-\operatorname{sinc}(0)}{h} &= \frac{\sin h - h}{h^2} \\
&= \frac{\left(\frac{h}{1!}-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\cdots\right)-h}{h^2} \\
&= \frac{-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\cdots}{h^2} \\
&= \frac{-\frac{h^1}{3!}+\frac{h^3}{5!}-\cdots}{1} \\
&\longrightarrow \frac{-\frac{0^1}{3!}+\frac{0^3}{5!}-\cdots}{1} = 0.
\end{aligned}$$

(b) An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion definiert als $\operatorname{sinc}(0) = 1 \neq 0$. Somit ist 0 keine Nullstelle. An allen anderen Stellen ist die Funktion definiert als ein Quotient $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$ und somit wird die Funktion genau dann 0, wenn der Zähler, also der Sinus 0 wird. Die Nullstellen des Sinus sind nach Folgerung V.4.12 aber genau $\pi\mathbb{Z} = \{\pi \cdot k : k \in \mathbb{Z}\}$. Der Fall $k = 0$ fällt hier allerdings heraus, weil dies zur Nullstelle $x = \pi \cdot 0 = 0$ führen würde, und wir ja an der Stelle 0 eine andere Funktionsdefinition haben.

Es gilt also: Die Nullstellen der sinc-Funktion sind $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\} = \pi\mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Der Grenzwert für $x \longrightarrow \pm\infty$, also $|x| \longrightarrow +\infty$ lässt sich leicht berechnen, wenn man verwendet, dass der Sinus betragsmäßig höchstens 1 werden kann:

$$|\operatorname{sinc}(x)| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \longrightarrow 0 \text{ für } |x| \to +\infty.$$

Hausübung

Aufgabe H52 (Polardarstellung)

Seien $z_1 := 2i$ und $z_2 := -\frac{4}{\sqrt{2}} + i\frac{4}{\sqrt{2}}$.

a) Bestimme die Polardarstellungen von z_1 und z_2.

b) Bestimme unter Verwendung der Ergebnisse aus a) die Polardarstellungen von $z_3 = z_1 z_2$ und $z_4 = \frac{z_1}{z_2}$.
Hinweis: Benutze die Schreibweise mit der Exponentialfunktion.

c) Gib z_3 und z_4 in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

d) Zeichne z_1, z_2, z_3 und z_4 in eine komplexe Ebene ein und interpretiere die Multiplikation mit z_2 und die Division mit z_2 geometrisch.

Lösung:

a) Es gilt $|z_1| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$ und daher $z_1 = 2(0 + i1)$.
Wir suchen also $\varphi \in [0, 2\pi[$, so dass

$$\begin{array}{lllll} & \cos(\varphi) = 0 & & \wedge & \sin(\varphi) = 1 \\ \Leftrightarrow & (\varphi = \frac{\pi}{2} & \vee \quad \varphi = \frac{3}{2}\pi) & \wedge & (\varphi = \frac{\pi}{2}) \\ \Leftrightarrow & \varphi = \frac{\pi}{2}. & & & \end{array}$$

Damit ergibt sich

$$z_1 = 2(\cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2})) \quad (= 2\exp(\tfrac{\pi}{2}i)\ ).$$

Es gilt $|z_2| = \sqrt{(\frac{-4}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{4}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{\frac{16}{2} + \frac{16}{2}} = \sqrt{16} = 4$ und daher $z_2 = 4(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$.
Wir suchen also $\varphi \in [0, 2\pi[$, so dass

$$\begin{array}{lllll} & \cos(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2}} & & \wedge & \sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow & (\varphi = \frac{3}{4}\pi & \vee \quad \varphi = \frac{5}{4}\pi) & \wedge & (\varphi = \frac{1}{4}\pi \quad \vee \quad \varphi = \frac{3}{4}\pi) \\ \Leftrightarrow & \varphi = \frac{3}{4}\pi. & & & \end{array}$$

Damit ergibt sich

$$z_2 = 4(\cos(\tfrac{3}{4}\pi) + i\sin(\tfrac{3}{4}\pi)) \quad (= 4\exp(\tfrac{3}{4}\pi i)\ ).$$

b) Es gilt

$$\begin{array}{rcl} z_3 & = & z_1 z_2 = 2\exp(\frac{\pi}{2}i)4\exp(\frac{3}{4}\pi i) = 8\exp(\frac{1}{2}\pi i + \frac{3}{4}\pi i) = 8\exp(\frac{5}{4}\pi i) \\ (= & & 8(\cos(\frac{5}{4}\pi) + i\sin(\frac{5}{4}\pi)) \quad). \end{array}$$

und

$$z_4 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\exp(\frac{\pi}{2}i)}{4\exp(\frac{3}{4}\pi i)} = \frac{1}{2}\exp(\tfrac{\pi}{2}i - \tfrac{3}{4}\pi i) = \frac{1}{2}\exp(-\tfrac{1}{4}\pi i) \quad \left(= \tfrac{1}{2}(\cos(\tfrac{7}{4}\pi) + i\sin(\tfrac{7}{4}\pi))\right).$$

c) Es gilt

$$z_3 = 8(\cos(\tfrac{5}{4}\pi) + i\sin(\tfrac{5}{4}\pi)) = -8\frac{1}{\sqrt{2}} - i8\frac{1}{\sqrt{2}} = -4\sqrt{2} - i4\sqrt{2}$$

und

$$z_4 = \tfrac{1}{2}(\cos(\tfrac{7}{4}\pi) + i\sin(\tfrac{7}{4}\pi)) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

d) Die Multiplikation mit z_2 entspricht einer Drehung um 135° entgegen dem Uhrzeigersinn und einer Streckung um 4. Die Division mit z_2 entspricht einer Drehung um 135° im Uhrzeigersinn und einer Streckung um $\frac{1}{4}$.

Aufgabe H53 (Umkehrfunktion)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x - \sin x$. Zeige: f ist bijektiv und hat eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Gib alle $y \in \mathbb{R}$ an, an denen f^{-1} differenzierbar ist.

Lösung: Die Funktion f ist als Summe zweier differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar mit Ableitung:

$$f'(x) = 1 - \cos x.$$

Diese Ableitungsfunktion wird genau dann 0, wenn der Cosinus den Wert 1 annimmt. Dies ist aber nur bei allen ganzzahligen Vielfachen von 2π der Fall. Das heißt: Auf dem offenen Intervall $]0, 2\pi[$ ist die Ableitung echt größer 0. Somit ist f auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 2\pi]$ streng monoton steigend. Analog gilt dies für alle Intervalle der Form $[k \cdot 2\pi, (k+1) \cdot 2\pi]$ für $k \in \mathbb{Z}$. Also ist f auf all diesen Intervallen streng monoton steigend, da diese aber ganz $\mathbb{R}$ überdecken und sich gegenseitig überlappen, bedeutet dies, dass die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend und damit injektiv ist.

Die Sinusfunktion nimmt nur Werte zwischen -1 und $+1$ an, d.h. $f(x) = x - \sin(x)$ ist immer grösser/gleich $x - 1$ und kleiner/gleich $x + 1$. Somit sieht man, dass $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Da f stetig ist, sagt uns der Zwischenwertsatz, dass f auch alle Werte dazwischen annimmt. Somit ist f bijektiv.

Nach dem Satz über die Umkehrfunktion (stetige Version) (Satz IV.1.21) folgt daraus, dass die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

Es bleibt, zu untersuchen, an welchen Stellen f^{-1} stetig ist. Hierzu benutzen wir die differenzierbare Version des Satzes über die Umkehrfunktion (Satz V.1.11). Dieser sagt uns, dass f^{-1} am Punkt $f(p)$ differenzierbar ist, wenn $f'(p) \neq 0$ ist. Wir haben aber bereits gesehen, dass $f'(p) = 1 - \cos x = 0 \Longrightarrow p \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Daraus erhalten wir: Falls $p \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$, dann ist f^{-1} differenzierbar an der Stelle $f(p)$.

Nun wüssten wir gerne noch, dass auch die Umkehrung gilt: f^{-1} differenzierbar an der Stelle $f(p)$ ist, ist dann $p \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$?

Wir wissen, dass $f^{-1}(f(x)) = x$. Wenden wir nun die Kettenregel auf diese Gleichung an:

$$\left(f^{-1}\right)'(f(p)) \cdot f'(p) = 1.$$

Daraus folgt, dass $f'(p) \neq 0$ ist und damit dass $p \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$ ist.

Wir haben also gezeigt: f^{-1} ist differenzierbar an allen Stellen $y \in \mathbb{R}$ bis auf die Stellen $f(p)$ mit $p \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Wenn aber $p \in 2\pi\mathbb{Z}$ ist, dann ist $f(p) = p - \sin(2\pi k)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und das ist gleich p.

Somit vereinfacht sich unser Ergebnis zu:

f^{-1} ist überall differenziebar, außer an den Stellen $2\pi\mathbb{Z} = \{k \cdot 2\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe H54 (Kurvendiskussion)

Gegeben sei die Funktion $R :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \frac{\log(t)}{t}$.

(a) Finde die Nullstellen der Funktion R und berechne $\lim_{t\searrow 0} R(t)$ und $\lim_{t\to+\infty} R(t)$.

(b) Untersuche die Funktion R auf Monotonie und Extremstrellen.

(c) Was ist das Bild der Funktion? Ist sie surjektiv?

(d) Skizziere den Graphen der Funktion.

(e) Zeige: Wenn zwei unterschiedliche Zahlen $s < t$ auf den gleichen Wert $R(s) = R(t)$ abgebildet werden, dann ist $1 < s < e < t$.

(f) Zeige den folgenden zahlentheoretischen Satz: Wenn für zwei natürliche Zahlen $k, l \in \mathbb{N}$ gilt, dass $k^l = l^k$ ist, dann sind entweder beide gleich oder eine ist 2 und die andere 4.

Lösung:

(a) $R(t) = 0 \iff \frac{\log(t)}{t} = 0 \iff \log(t) = 0 \iff t = 1$. Also ist $t = 1$ die einzige Nullstelle der Funktion R.

Für $t \searrow 0$ divergiert $\frac{1}{t}$ gegen $+\infty$ und $\log(t)$ gegen $-\infty$. Folglich divergiert das Produkt $R(t) = \frac{1}{t} \cdot \log(t)$ gegen $-\infty$.

Für $t \to +\infty$ können wir die L'Hospital-Regel anwenden, weil Zähler und Nenner beide gegen $+\infty$ divergieren:

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} \frac{\log(t)}{t} = \lim_{t\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{t}}{1} = 0.$$

(b) Die Ableitung der Funktion ist nach der Quotientenregel gleich:

$$R'(t) = \frac{t \cdot \log'(t) - \log(t) \cdot 1}{t^2} = \frac{1 - \log(t)}{t^2}.$$

Der Nenner ist immer positiv, d.h. das Vorzeichen der Ableitung hängt nur vom Zähler ab und der ist positiv, genau dann wenn $1 - \log(t) > 0$, d.h. $\log(t) < 1$, also $t < e$.

Die Ableitung ist also positiv auf $]0, e[$ und negativ auf $]e, +\infty[$. Folglich ist f auf $]0, e]$ streng monoton wachsend, hat an der Stelle e einen Hochpunkt und ist auf $[e, +\infty[$ streng monoton fallend.

(c) Die Funktion hat an der Stelle e ein globales Maximum, d.h. $R(t) \leq R(e) = \frac{\log(e)}{e} = \frac{1}{e}$ für alle $t > 0$. Also ist das Bild $R(]0, +\infty[) = \{R(t) : t \in]0, +\infty[\}$ eine Teilmenge von $\left]-\infty, \frac{1}{e}\right]$. Da die Funktion stetig auf einem Intervall ist, muss auch das Bild ein Intervall sein. Der Wert $\frac{1}{e}$ wird erreicht an der Stelle e, es gibt beliebig kleine Werte im Bild, weil $\lim_{t\searrow 0} R(t) = -\infty$. Folglich ist das Bild genau $\left]-\infty, \frac{1}{e}\right]$. Die Funktion R ist somit insbesondere nicht surjektiv.

(e) Seien $0 < s < t$ gegeben mit $R(s) = R(t)$.

Wir nehmen zuerst einmal per Widerspruch an: $t \leq e$: In diesem Fall befinden sich sowohl s als auch t im Intervall $]0, e]$, auf dem die Funktion R streng monoton, also insbesondere injektiv ist. Dann müsste $s = t$ sein. Widerspruch.

Also gilt: $t > e$.

Wenn nun auch $s \geq e$ wäre, hätten wir den analogen Fall, da auf dem Intervall $[e, \infty[$ die Funktion ebenfalls streng monoton ist.

Folglich muss $s < e < t$ gelten. Wenn nun $s \leq 1$ wäre, dann würde aus der Monotonie von R auf dem Intervall $]0, e]$ folgen, dass $R(s) \leq R(1) = 0$ wäre, d.h. der Wert $R(s)$ wäre kleiner/gleich 0. Dies ist aber nicht möglich, da $R(t) > 0$ ist, denn R hat nur eine Nullstelle, nämlich bei 1. Und somit muss sie links von der 1 negativ und rechts von der 1 positiv sein.

Daraus folgt nun, wie gefordert: $1 < s < e < t$.

(f) Angenommen $k^l = l^k$. Wenn $k = l$ ist, dann sind wir fertig. Nehmen wir also an, $k \neq l$. Dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $k < l$. Nun wenden wir auf die Gleichung

$$k^l = l^k$$

den Logarithmus an und erhalten:

$$\log(k^l) = \log(l^k)$$

$$l \cdot \log(k) = k \cdot \log(l)$$

$$\frac{\log(k)}{k} = \frac{\log(l)}{l}$$

$$R(k) = R(l)$$

Aus Teil (e) wissen wir nun, dass $1 < k < e < l$ ist. Nun wissen wir aber, dass k eine ganze Zahl ist und es zwischen 1 und e nur eine einzige ganze Zahl gibt, nämlich 2. Folglich ist $k = 2$.

Es bleibt zu zeigen, dass $l = 4$ ist. Hierzu berechnen wir:

$$R(4) = \frac{\log(4)}{4} = \frac{\log(2^2)}{4} = \frac{2\log(2)}{4} = \frac{\log(2)}{2} = R(2) = R(k) = R(l)$$

Wir sehen also, dass $R(4) = R(l)$ ist. Aber R ist auf dem Intervall $[e, +\infty[$ injektiv, und da sowohl l als auch die Zahl 4 in diesem Intervall liegen, muss zwangsläufig $l = 4$ sein. Das war zu beweisen.

Aufgabe H55 (Logarithmen)

Wir erinnern an die Definition: $(\forall a > 0, x \in \mathbb{R}) a^x := \exp(x \cdot \log(a))$.

(a) Für welche $a > 0$ ist die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[: x \mapsto a^x$ bijektiv? Gib die Umkehrfunktion an.

(b) Die Umkehrfunktion auf Aufgabenteil (a) nennt man den Logarithmus zur Basis a und schreibt:

$$\log_a := (\exp_a)^{-1} :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}.$$

Für welchen Wert a ist $\log_a = \log$?

(c) Zeige für alle $a, b, x > 0, a, b \neq 1$ die Formel: $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$. (Das bedeutet: Wenn man den Logarithmus zu einer bestimmten Basis b berechnen kann, so kann man Logarithmen zu beliebigen Basen darstellen. (Deswegen konnte man früher z.B. auch nur mit einer Logarithmentafel zur Basis 10 natürliche Logarithmen berechnen.))

(d) Sei $a, r, s \in \mathbb{R}, a > 0, s > 1$. Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad &: \quad x \mapsto a^x \\
g :]0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad &: \quad x \mapsto x^r \\
h :]0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad &: \quad x \mapsto \log_s(x) \\
l :]1, +\infty[\to \mathbb{R} \quad &: \quad x \mapsto \log_x(s)
\end{aligned}$$

Lösung:

(a) Sei $a > 0, x \in \mathbb{R}$ und

$$y = a^x.$$

Wir untersuchen, unter welchen Umständen, wir diese Gleichung nach x auflösen können:

$$\begin{aligned}
y = a^x \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \exp(x \cdot \log(a)) \\
&\Longleftrightarrow \quad \log(y) = x \cdot \log(a) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\log(y)}{\log(a)} = x
\end{aligned}$$

Die erste Umformung war die Definition der Potenz, die zweite Umformung war das Logarithmieren auf beiden Seiten, die dritte Umformung ist die entscheidende, denn hier haben wir durch die Zahl $\log(a)$ geteilt. Dies ist nur möglich, wenn $\log(a) \neq 0$, d.h. wenn $a \neq 1$ ist. In allen anderen Fällen, d.h. $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$ ist die Funktion $\exp_a$ bijektiv mit Umkehrfunktion $y \mapsto \frac{\log(y)}{\log(a)}$.

(b) Wir wissen aus der (a), dass $\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$. Dies ist gleich $\log(x)$, wenn $\log(a) = 1$, d.h. wenn $a = e$ ist.

(c)

$$\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\frac{\log(x)}{\log(b)}}{\frac{\log(a)}{\log(b)}} = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \log_a(x).$$

(d)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \exp(x \cdot \log(a)).\\
f'(x) &= \exp(x \cdot \log(a)) \cdot (1 \cdot \log(a))\\
&= \log(a) \cdot a^x.\\
g(x) &= \exp(r \cdot \log(x)).\\
g'(x) &= \exp(r \cdot \log(x)) \cdot \left(r \cdot \frac{1}{x}\right)\\
&= x^r \cdot r \cdot x^{-1}\\
&= r \cdot x^{r-1}.\\
h(x) &= \frac{\log(x)}{\log(s)}.\\
h'(x) &= \frac{\frac{1}{x}}{\log(s)} = \frac{1}{x \cdot \log(s)}.\\
l(x) &= \frac{\log(s)}{\log(x)}\\
l'(x) &= \frac{0 \cdot \log(x) - \log(s) \cdot \frac{1}{x}}{(\log(x))^2}\\
&= -\frac{\log(s)}{x \cdot (\log(x))^2}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe H56 (komplexe Exponentialfunktion)
Sei $z \in \mathbb{C}$. Beweise die folgende Formel:

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$$

Lösung: Sei $z = x + iy$ mit $x := \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |e^z| &= \left|e^{x+iy}\right| \\ &= \left|e^x \cdot e^{iy}\right| \\ &= |e^x| \cdot \left|e^{iy}\right| \\ &= |\underbrace{e^x}_{>0}| \cdot |\cos y + i \sin y| \\ &= e^x \cdot \underbrace{\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y}}_{=1} \\ &= e^x = e^{\mathrm{Re} z}. \end{aligned}$$

Aufgabe H57 (L'Hospital-Regel)
Sei (nochmals) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x - \sin x$. Wenn ich den Grenzwert $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ berechnen will, darf ich dann die L'Hospital-Regel anweden und folgern, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \cos x}{1} = \text{divergent?}$$

Falls Nein: Warum darf ich die Regel nicht anwenden?

Lösung: Der Bruch $\frac{f'(x)}{1} = \frac{1-\cos(x)}{1}$ konvergiert nicht in $\mathbb{R}$ und divergiert auch nicht bestimmt gegen $\pm\infty$. Somit ist die Formulierung, die bei allen Version der Hospial-Regel dabei steht

„falls der rechte Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert"

nicht erfüllt und wir dürfen die Regel nicht anwenden.
Dies ist der Grund, warum wir die Regel nicht anwenden durften. Nun überlegen wir uns, dass die Regel auch tatsächlich ein falsches Ergebnis geliefert hätte:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x - \sin x}{x} = 1 - \frac{\sin x}{x}$$

Der erste Summand ist konstant 1, der zwei Summand lässt sich betragsmäßig abschätzen durch:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow +\infty.$$

Das bedeutet:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Aufgabe H58 (Reihenkonvergenz)

(a) Für welche $r \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe? $\sum_{k=1}^{\infty} k! r^k$

(b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe? $\sum_{l=1}^{\infty} e^{-2l} s^l$

(c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe? $\sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{3}{2} \cdot \log(m)\right) \cdot t^m$

(d) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n^2}$

Lösung:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k! r^k}_{a_k}$

Wir verwenden das Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \left|\frac{(k+1)! r^{k+1}}{k! r^k}\right| \\ &= \left|\frac{(k+1)k! r \cdot r^k}{k! r^k}\right| \\ &= \left|\frac{(k+1)r}{1}\right| = (k+1)|r|. \end{aligned}$$

Für $r = 0$ ist dies konstant $0 < 1$ und somit ist die Reihe absolut konvergent. Für $r \neq 0$ ist $|r| > 0$ und die Folge $((k+1)|r|)_{k\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen $+\infty$. Somit ist die Reihe divergent nach dem Quotientenkriterium.

Also: Die Reihe konvergiert nur, wenn $r = 0$.

(b)

$$\sum_{l=1}^{\infty} e^{-2l} s^l = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{s}{e^2}\right)^l$$

Diese Reihe ist also, bis auf die Tatsache, dass sie nicht bei 0, sondern bei 1 anfängt eine geometrische Reihe und konvergiert also genau dann, wenn $\left|\frac{s}{e^2}\right| < 1$ ist. Das lässt sich umformen zu

$$|s| < e^2$$

Die Reihe konvergiert also genau dann, wenn $s \in]-e^2, e^2[$ liegt.

(c) $\sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{3}{2} \cdot \log(m)\right) \cdot t^m$.

Der Term $\exp\left(-\frac{3}{2} \cdot \log(m)\right)$ lässt sich umformen zu $m^{-\frac{3}{2}}$. Die Reihe lässt sich also vereinfacht schreiben als:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{m^{-\frac{3}{2}} t^m}_{a_m}$$

Wir verwenden wieder einmal das Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| &= \left|\frac{(m+1)^{-\frac{3}{2}} t^{m+1}}{m^{-\frac{3}{2}} t^m}\right| \\ &= \left|\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot t\right| \\ &= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{m}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot |t| \end{aligned}$$

Der erste Teil konvergiert gegen $1^{\frac{3}{2}} = 1$ und somit konvergiert diese Folge gegen $1 \cdot |t| = |t|$.

Somit wissen wir nach dem Quotientenkriterium, dass für $|t| < 1$ die Reihe konvergiert und für $|t| > 1$ die Reihe divergiert. Es bleiben die beiden Fälle $|t| = 1$ (also $t = 1$ oder $t = -1$) zu klären. Hier hilft uns das Quotientenkriterium nicht weiter.

Diese beiden Fälle behandeln wir auf einmal, indem wir die Reihe auf absolute Konvergenz testen. Sei $|t| = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| &= \sum_{m=1}^{\infty} \left| m^{-\frac{3}{2}} t^m \right| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{3}{2}}} \underbrace{|t|}_{=1} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert nach Folgerung III.4.4, da $\frac{3}{2} > 1$ ist. Somit ist die Reihe absolut konvergent und damit konvergent.

Wir haben also gesehen, dass die Reihe konvergiert, falls $t \in [-1, 1]$ ist und ansonsten divergiert.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n^2}$

Wir testen auf absolute Konvergenz und nutzen dabei aus, dass der Sinus betragsmäßig niemals größer als 1 wird.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n \cdot x)}{n^2} \right| &= \frac{|\sin(n \cdot x)|}{n^2} \\ &\leq \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Letztere Reihe konvergiert wieder wegen Folgerung III.4.4, da $2 > 1$ ist. Somit ist die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent und damit konvergent.

Aufgabe H59 (Funktionenfolge)
Sei $D :=]0, +\infty[$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die folgende Funktion gegeben:

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \exp\Big(-t - n\exp(-t)\Big).$$

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Bestimme $\lim_{t\to+\infty} f_n(t)$ und $\lim_{t\searrow 0} f_n(t)$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Für welche $t \in]0, +\infty[$ ist die Ableitung $f_n'(t)$ positiv, für welche Werte ist die Ableitung negativ?

(c) Finde alle Extremstellen der Funktion $f_n(t)$ (in Abhängingkeit von n).

(d) Berechne $\|f_n\|_D$.

(e) Zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die konstante 0-Funktion konvergiert.

Lösung:

(a) Wir schreiben die Funktion folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \exp\Big(-\big(t + n\exp(-t)\big)\Big) \\ &= \frac{1}{\exp\Big(t + n\exp(-t)\Big)} \\ &= \frac{1}{\exp\Big(t + n\cdot\frac{1}{e^t}\Big)}. \end{aligned}$$

Wenn nun t gegen $+\infty$ divergiert, so divergiert e^t ebenfalls gegen $+\infty$, also konvergiert $\frac{1}{e^t}$ gegen 0. Da n als konstant anzusehen ist, konvergiert $n\cdot\frac{1}{e^t}$ ebenfalls gegen $n\cdot 0 = 0$. Nun addieren wir t und somit divergiert der Ausdruck $\Big(t+n\cdot\frac{1}{e^t}\Big)$ wieder bestimmt gegen $+\infty$ und ebenfalls $\exp\Big(t+n\cdot\frac{1}{e^t}\Big)$. Dies führt wiederum dazu, dass der Kehrwert gegen 0 konvergiert. Deshalb gilt:

$$\lim_{t\to+\infty} f_n(t) = 0.$$

Ähnliche Überlegung für $t \searrow 0$: Die angegebene Funktion f_n ließe sich auf ganz $\mathbb{R}$ ausdehnen mit der selben Funktions- vorschrift, da die Exponentailfunktion überall definiert ist und – in der Originalversion der Funktionsvorschrift – weder Wurzeln noch Bruchstriche, noch Logarithmen oder ähnliches vorkommen. Die so ausgedehnte Funktion ist zusammengesetzt aus lauter stetigen Funktionen und somit stetig und insbesondere stetig an der Stelle 0. Deshalb gilt:

$$\lim_{t\searrow+\infty} f_n(t) = \exp\Big(-\big(0 + n\exp(-0)\big)\Big) = e^{-n}.$$

(b) Die Funktion ist zusammengesetzt aus differenzierbaren Funktionen, deshalb überall differenzierbar. Die Ableitung berechnet sich nach der Kettenregel in Verbindung mit anderen Regeln:

$$\begin{aligned} f_n'(t) &= \Bigg(\exp\Big(-t - n\exp(-t)\Big)\Bigg)' \\ &\overset{\text{(Kettenregel)}}{=} \exp\Big(-t - n\exp(-t)\Big)\cdot\Big(-t - n\exp(-t)\Big)' \\ &= \exp\Big(-t - n\exp(-t)\Big)\cdot\Big(-1 + n\exp(-t)\Big). \end{aligned}$$

Die reelle Exponentialfunktion ist überall echt größer 0, deshalb ist die erste Klammer auf jeden Fall positiv. Es reicht also, sich die zweite Klammer anzuschauen, um das Vorzeichen der Ableitung zu bestimmen:

$$\begin{aligned} f_n'(t) > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \Big(-1 + n\exp(-t)\Big) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -1 + n \cdot \frac{1}{e^t} > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad n \cdot \frac{1}{e^t} > 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{e^t} > \frac{1}{n} \\ &\Longleftrightarrow \quad e^t < n \\ &\Longleftrightarrow \quad t < \log(n). \end{aligned}$$

Das heißt: Für alle $t \in]0, \log(n)[$ ist die Ableitung echt größer 0. Ebenso zeigt man, dass

$$f_n'(t) < 0 \Longleftrightarrow t > \log(n),$$

also ist für alle $t \in]\log(n), +\infty[$ die Ableitung echt kleiner 0.

(c) Notwendige Bedingung für lokale Extremstellen ist, dass die Ableitung 0 wird.
Wir haben in Teil (b) gesehen, dass die für die Ableitung folgendes gilt:

$$(\forall t \in]0, \log(n)[) f_n'(t) > 0$$

Also ist f_n auf dem Intervall $]0, \log(n)]$ streng monoton wachsend und alle $t < \log(n)$ scheiden als Extremstellen aus.
Es gilt aber ebenfalls, dass

$$(\forall t \in]\log(n), +\infty[) f_n'(t) < 0$$

Also ist f_n auf dem Intervall $[\log(n), +\infty[$ streng monoton fallend und alle $t > \log(n)$ scheiden als Extremstellen aus.
Der einzig verbleibende Kandidat $t = \log(n)$ ist auch tatsächlich eine Extremstelle, da die Funktion links davon monoton wächst und rechts davon monoton fällt.
Die Antwort auf die Aufgabe lautet also: Die Funktion f_n nimmt an der Stelle $t = \log(n)$ ein lokales Maximum an. Es gibt keine weiteren lokalen Extrema.

(d) Die Maximumsnorm $\|f_n\|_D$ ist definiert als $\sup\{|f_n(t)| : t \in D\}$. Die Beträge um den Funktionsterm $f_n(t)$ können wir weglassen, da die reelle Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt und somit die Funktion f_n überall echt größer als 0 ist. Die Funktion ist streng monoton wachsend auf $]0, \log(n)]$ und monoton fallend auf $[\log(n), +\infty[$. Deshalb ist das lokale

Maximum aus Aufgabe (c) ein globales Maximum und es gilt:

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_D &= \sup\{|f_n(t)| : t \in D\} \\
&= \sup\{f_n(t) : t \in D\} \\
&= \max\{f_n(t) : t \in D\} \\
&= f_n(\log(n)) \\
&= \frac{1}{\exp\Big((\log(n)) + n \cdot \frac{1}{e^{\log(n)}}\Big)} \\
&= \frac{1}{\exp\Big(\log(n) + n \cdot \frac{1}{n}\Big)} \\
&= \frac{1}{\exp\Big(\log(n) + 1\Big)} \\
&= \frac{1}{e^{\log(n)} \cdot e^1} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

(e) Nach Satz IV.2.8(b) konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann auf D gleichmäßig gegen 0, wenn die reelle Folge der Normen $(\|f_n - 0\|_D)_{n\in\mathbb{N}} = (\|f_n\|_D)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Von dieser Folge haben wir aber in Aufgabenteil (d) gezeigt, dass sie gleich

$$\|f_n\|_D = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{e}$$

ist und letztere Folge konvergiert gegen 0, weil $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 geht und $\frac{1}{e}$ konstant ist. Also konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen 0.

Aufgabe H60 (die Mathematik ist widerlegt)

Schlechte Neuigkeiten: Herr X. hat seine populäre Mathematik-Website (siehe G32 und H21) geschlossen. Grund dafür war nicht die Temperatur seines Tees (siehe G35), sondern die Tatsache, dass es ihm inzwischen gelang, die Mathematik zu widerlegen und er so keinen Sinn mehr darin sah, mathematisch interessierte Besucher für die Mathematik zu begeistern. Dieser Beweis geht so:

$$\begin{aligned} e^{2\pi i} &= 1 && \big|\ \text{Multipliziere mit } e. \\ e^{2\pi i+1} &= e && \big|\ \text{Potenziere mit } 2\pi i. \\ \left(e^{2\pi i+1}\right)^{2\pi i} &= e^{2\pi i} \\ e^{(2\pi i+1)\cdot 2\pi i} &= e^{2\pi i} \\ e^{(2\pi i)^2+2\pi i} &= e^{2\pi i} \\ e^{4\pi^2(-1)}\cdot e^{2\pi i} &= e^{2\pi i} \\ e^{-4\pi^2} &= 1 \end{aligned}$$

Die linke Seite der Gleichung ist eine reelle Zahl kleiner 1, weil der Exponent reell und kleiner 0 ist. Die rechte Seite ist gleich 1, folglich ist die Mathematik widerlegt.

Lösung: Auch wenn keine direkte Fragestellung in der Aufgabe war, so wollen wir hier nochmal begründen, wo sich Herr X. geirrt hat. Alle Umformungen waren erlaubt, bis auf eine:

$$\left(e^{2\pi i+1}\right)^{2\pi i} = e^{(2\pi i+1)\cdot 2\pi i}$$

Ein entsprechendes Gesetz $(e^b)^c = e^{bc}$ gilt nur, wenn

$$b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{Z}$$

oder

$$b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$$

Der hier notwendige Fall $b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}$ kann im Allgemeinen gar nicht gelten, weil e^b nicht reell zu sein braucht und $(e^b)^c$ dann gar nicht definiert ist.

Als Grundregel kann man sich merken: Man kann zwei komplexe Zahlen sinnvoll potenzieren, wenn

die Basis reell und positiv *ODER* der Exponent ganzzahlig ist.

Alle anderen Fälle führen zu Problemen.