Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007
Übung 13, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 43 (Lokale Extrema).

Für die folgenden Funktionen bestimme die lokalen Extremwerte sowie deren Typen.

(a) $f(x) = 2x^4 - 8x^2$ auf $D = [-1, 2]$

(b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ auf $D = [0, 5]$

(a)

$$f'(x) = 8x(x^2 - 2).$$

Die Nullstellen von f' auf D sind 0 und $\sqrt{2}$. Wegen $f''(x) = 24x^2 - 16$ gilt $f''(0) = -16 < 0$ und $f''(\sqrt{2}) = 32 > 0$. Also ist 0 ein globales Maximum von f mit $f(0) = 0$ und $\sqrt{2}$ ist ein globales Minimum von f mit $f(\sqrt{2}) = -8$ (Skizze!). Desweiteren gilt $f'(-1) < 0$ sowie $f'(2) > 0$. Somit ist -1 ein Randminimum und 2 ein Randmaximum.

(b)

$$f'(x) = (x - 3)(x - 1).$$

Die Nullstellen von f' auf D sind 1 und 3. Wegen $f''(x) = 2x - 4$ gilt $f''(1) = -2 < 0$ und $f''(3) = 3 > 0$. Also ist 1 ein lokales Maximum von f mit $f(1) = 2\frac{1}{3}$ und 3 ist ein globales Minimum von f mit $f(3) = 1$ (Skizze!). Desweiteren gilt $f'(0) = 3$ mit $f(0) = 1$ sowie $f'(5) = 8$ mit $f(5) =$. Somit ist -1 ein globales Randminimum und 2 ein globales Randmaximum.

G 44 (Extremwertaufgaben).

(a) Gegeben sei ein Quader mit den Kantenlängen a, b und c. Wie muss der Punkt P gewählt werden, damit der Polygonzug OPQ die kürzeste auf der Oberfläche des Quaders gelegene Verbindung von O und Q darstellt?

(b) Welchen Weg muss der Rettungsschwimmer R einschlagen, um möglichst schnell zu der in Not geratenen Strandschönheit E zu gelangen, wenn er fünfmal so schnell läuft, wie er schwimmt? Gesucht ist eine Gleichung für die Winkel beim Übergang vom Land zum Wasser.

(a) $\bar{OP} = \sqrt{a^2 + x^2}$ und $\bar{PQ} = \sqrt{(c-x)^2 + b^2}$ für $P = (a, 0, x)$.
Definiere $f(x) := \bar{OQ} = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(c-x)^2 + b^2}$.
Wir suchen das Minimum der Funktion f. *Es gilt*

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}$$

Es gilt $f'(x) = 0$ *genau dann wenn* $xb = ac - ax$ *(nachrechnen!), also genau dann wenn* $x = \frac{ac}{a+b}$. *Aus der letzten Zeile kann man schließen, dass bei* $x = \frac{ac}{a+b}$ *ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von Minus nach Plus vorliegt. Somit ist* $x = \frac{ac}{a+b}$ *das gesuchte Minimum.*

(b) *Es gilt* $s = v \cdot t$ *(Weg gleich Geschwindigkeit mal Zeit).*
Wir wissen $v_{Land} = 5 \cdot v_{Wasser}$.
Die Landstrecke berechnet sich zu $L = \sqrt{500^2 + x^2}$, *die Wasserstrecke berechnet sich zu* $W = \sqrt{(100 - x)^2 + 500^2}$.
Für die Gesamtzeit gilt $T = t_{Land} + t_{Wasser} = \frac{L}{v_{Land}} + \frac{W}{v_{Wasser}}$.
Fasse T *als Funktion von* x *auf. Dann gilt*

$$T'(x) = \frac{x}{L \cdot v_{Land}} - \frac{100 - x}{W \cdot v_{Wasser}}$$

Nun gilt $T'(x) = 0$ *genau dann wenn* $\frac{1}{v_{Land}} \cdot \frac{x}{L} = \frac{1}{v_{Wasser}} \cdot \frac{100-x}{W}$.
Setze $sin\alpha = \frac{x}{L}$ *und* $sin\beta = \frac{100-x}{W}$.
Dann gilt das sogenannte Brechungsgesetz $\frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{v_{Land}}{v_{Wasser}} = 5$.

G 45 (Regeln von de l'Hospital).

Finde die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$; (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$; (c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos \frac{x}{2}}{1-\cos x}$; (d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2}$.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1} = \frac{\sin 0}{1} = 0$, *da wir nach der ersten Regel von de l'Hospital (Satz V.3.2) in Nenner und Zähler zur Ableitung übergehen können, ohne den Grenzwert zu ändern.*

(b) Zweimalige Anwendung der ersten Regel von de l'Hospital liefert $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$.

(c) Zweimalige Anwendung der ersten Regel von de l'Hospital liefert $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos \frac{x}{2}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin \frac{x}{2}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}\cos \frac{x}{2}}{\cos x} = \frac{\frac{1}{4}\cos 0}{\cos 0} = \frac{1}{4}$.

(d) Nach der zweiten Regel von de l'Hospital ist $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$.

G 46 (Eine nützliche glatte Funktion).

Zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \ := \ \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0; \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist, und $f^{[n]}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[Hinweis: Zeige per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass f eine C^n-Funktion ist und es eine Polynomfunktion $p_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt derart, dass $f^{[n]}(x) = p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ für alle $x > 0$.]

Zunächst beobachten wir, dass f stetig ist, und allgemeiner jede Funktion der Form $g(x) = p(\frac{1}{x}) \cdot f(x)$ mit einer Polynomfunktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grade $k \in \mathbb{N}$. Es sind nämlich $g|_{]-\infty,0]} = 0$ und $g|_{]0,\infty[}$ stetig. Weiter ist $\lim_{x\nearrow 0} g(x) = \lim_{x\nearrow 0} 0 = 0$ und

$$\lim_{x\searrow 0} g(x) \ = \ \lim_{x\searrow 0} p(\tfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} \ = \ \lim_{y\to\infty} \frac{p(y)}{e^y} \ = \ \lim_{y\to\infty} \frac{p^{[k]}(y)}{e^y} \ = \ 0\,,$$

wobei wir für das vorletzte Gleichheitszeichen k mal die de l'Hospitalsche Regel angewandt haben und im letzten Schritt ausnutzen, dass $p^{[k]}$ eine konstante Funktion ist. Da der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert existieren und beide übereinstimmen, ist g auch in 0 stetig und somit stetig.

Nun der Beweis per Induktion: $n = 1$: Es ist $f'(x) = 0$ für $x < 0$ und $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ für $x > 0$. Nach dem Obigen ist die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := 0$ falls $x \leq 0$, $g(x) := \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ falls $x > 0$ stetig. Nach Aufgabe V.2.1 ist f differenzierbar und $f' = g$, also f eine C^1-Funktion.

Sei nun f bereits als C^n-Funktion erkannt, $f^{[n]}(x) = 0$ für $n \leq 0$ und $f^{[n]}(x) = p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ für $x > 0$. Dann ist $f^{[n+1]}(x) = 0$ für $x < 0$ und

$$f^{[n+1]}(x) \ = \ -\tfrac{1}{x^2}p_n'(\tfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} + \tfrac{p_n(\frac{1}{x})}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \ = \ p_{n+1}(\tfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$$

mit der Polynomfunktion $p_{n+1}(x) := \ -x^2p_n'(x) + x^2p_n(x)$. Diese Funktion hat nach den eingangs angestellten Überlegungen wieder eine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ (mit $0 \mapsto 0$), und somit ist f eine C^{n+1}-Funktion mit $f^{[n+1]}(0) = 0$. Dies beendet den induktiven Beweis.

Hausübung

H 49 (Wendepunkte).

Die *Wendepunkte* einer zweimal differenzierbaren Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert als die Nullstellen von f'' an denen ein Vorzeichenwechsel vorliegt.

Die *Van der Waalssche Zustandgleichung für reale Gase* lautet

$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$$

Dabei bezeichnet p den Druck, V das Volumen, T die absolute Temperatur, R die allgemeine Gaskonstante und a, b Stoffkonstanten. Wir wollen p in Abhängigkeit von V studieren, d.h. wir lösen nach p auf und fassen V als unabhängige Variable auf:

$$p = f_T(V) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}.$$

Der Index T deutet an, dass die Funktion f_T von T abhängt.

Das Gas läßt sich nur für Temperaturen T, die unterhalb einer *kritischen Temperatur* T_k liegen, durch steigenden Druck verflüssigen. Für $T > T_k$ bleibt das Gas auch unter beliebig hohem Druck gasförmig. Die kritische Temperatur T_k ist mathematisch dadurch bestimmt, dass die zugehörige Funktion p einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente besitzt. (s. Gerthsen, Physik, 5.6.4, zum physikalischen Hintergrund). Der Wendepunkt V_k wird *kritisches Volumen* genannt, der zugehörige Wert $p_k = f_{T_k}(V_k)$ *kritischer Druck*.

Bestimme T_k, V_k und p_k.

H 50 (Regeln von de l'Hospital).

Finde die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1}$;

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ sowie $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}$ mit $\alpha, \beta > 0$;

(c) $\lim_{x\searrow 0} x^\alpha \ln x$ mit $\alpha > 0$;

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x} = \frac{\cos 0}{e^0} = 1.$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$. *Da* $\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$, *wobei* $[0, \infty[\to \mathbb{R}$, $y \mapsto y^\beta$ *stetig ist und* $\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \to 0$ *nach dem Vorigen, folgt* $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0^\beta = 0.$

(c) $\lim_{x\searrow 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$ *Alternativ könnte man* $y = \frac{1}{x}$ *substituieren und somit den Limes auf Teil (b) zurückführen:* $\lim_{x\searrow 0} x^\alpha \ln x = \lim_{y\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{y}}{y^\alpha} = \lim_{y\to\infty} \frac{-\ln y}{y^\alpha} = 0.$

(d) Beim hier zu untersuchenden Limes gehen Sie mit der Regel von de l'Hospital baden, da diese bei mehrmaliger Anwendung die Sache nicht einfacher macht, sondern in jedem zweiten Schritt wieder auf den ursprünglichen Limes zurückführt. Indem man den Bruch mit e^{-x} erweitert, sieht man jedoch ganz direkt, dass

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \to 1$$

für $x \to \infty$.

H 51 (Weitere nützliche Funktionen). Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in **G48**.

(a) Zeige, dass f monoton wächst und bestimme $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Skizziere f grob.

(b) Zeige, dass die glatte Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := -f(1 - 2f(x))$ monoton wächst. Zeige außerdem, dass reelle Zahlen $r < R$ existieren, so dass $g(x) = m$ für $x < r$ und $g(x) = M$ für $x > R$. Skizziere g grob.

(c) Bastle aus g eine glatte Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit analogen Eigenschaften, jedoch mit $m = 0$ und $M = 1$.

(d) Skizziere eine glatte Funktion $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften: Es existieren $a < b < c < d$ derart, dass $k(x) = 0$ gilt falls $x < a$ oder $x > d$, $k(x) = 1$ ist für alle $x \in [b, c]$, die Einschränkung $k|_{[a,b]}$ monoton wächst und $k|_{[c,d]}$ monoton fällt. Bastele mit Hilfe von h eine solche Funktion k.

Bem.: Man nennt eine solche Funktion k eine "Abschneidefunktion" oder auch "cut-off."

(a) Wir wissen aus der Lösung von Aufgabe **G48**, *dass $f'(x) = 0$ für $x \leq 0$ sowie $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} > 0$ für $x > 0$. Also ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit f monoton wachsend. Da $f(x) = 0$ für $x \leq 0$, gilt $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$. Weiter gilt $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \to e^0 = 1$ für $x \to \infty$, da $-\frac{1}{x} \to 0$ und die Exponentialfunktion stetig ist.*

(b) Nach der Kettenregel ist

$$g'(x) = -f'(1 - 2f(x)) \cdot (-2f'(x)) = 2f'(1 - 2f(x)) \cdot f'(x) \geq 0\,,$$

da ja $f'(y) \geq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Für $x \geq \frac{1}{\ln 2}$ ist $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \geq \frac{1}{2}$, somit $1 - 2f(x) \leq 0$ und folglich $g(x) = -f(1 - 2f(x)) = 0$. Wir können also $M := 0$ nehmen. Für $x \leq 0$ ist weiter $f(x) = 0$, somit $g(x) = -f(1) = -\frac{1}{e} =: m$.

(c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) := e \cdot g(x) + 1$ hat die gewünschten Eigenschaften.

(d) Es sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte, monoton wachsende Funktion derart, dass für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt: $h(x) = 0$ für $x \leq a$ und $h(x) = 1$ für $x \geq b$. Dann ist $x \mapsto h(2b + 1 - x)$ eine monoton fallende, glatte Funktion, die konstant 0 ist für $x \geq 2b + 1 - a =: d$ $(= b + 1 + (b - a) > b + 1)$ und konstant 1 für $x \leq b + 1 =: c$. Wir definieren

$$k(x) := h(x) \cdot h(2b + 1 - x)\,.$$

Für $x \leq c$ *ist* $k(x) = h(x)$; *somit ist* $k|_{]-\infty,c]}$ *monoton wachsend,* $k|_{]-\infty,a]} = 0$ *und* $k|_{[b,c]} = 1$. *Für* $x \geq c$ (was $> b$ *ist) ist* $h(x) = 1$, *also* $k(x) = h(2b+1-x)$ *monoton fallend für* $x \geq c$ *und* $k(x) = h(2b+1-x) = 0$ *für* $x \geq d$.