Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Sommersemester 2007
4.7.2007

12. Übungsblatt zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Aufgaben und Lösungen

Gruppenübung

Aufgabe G40 (Ableitungsregeln)

Bestimme mit Hilfe der Rechenregeln für das Differenzieren die Ableitungen folgender Funktionen:

(a) $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^5 + 3x^2 - 42$

(b) $f_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$

(c) $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \log(x^2 + 2x + 2)$

(d) $f_d :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \log(x^{23}) - 23\log(x) + 12$

(e) $f_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

(f) $f_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$, wobei $a > 0$ gegeben ist und $a^x := \exp(x \cdot \log a)$

(g) $f_g :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^x$, wobei $x^x := \exp(x \cdot \log x)$

Lösung:

(a) $f_a'(x) = 5x^4 + 6x$

(b) $f_b'(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 2x\right) = -x\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$

(c) $f_c'(x) = \frac{1}{x^2+2x+2} \cdot (2x+2) = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$

(d) $f_d'(x) = \frac{1}{x^{23}} \cdot 23x^{22} - 23 \cdot \frac{1}{x} = 23 \cdot \frac{x^{22}}{x^{23}} - 23 \cdot \frac{1}{x} = 0$

(e) $f_e'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

(f) $f_f'(x) = \exp(x \cdot \log a) \cdot \log a = \log(a) \cdot a^x$

(g) $f_g'(x) = \exp(x \cdot \log x) \cdot \left(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\log x + 1)$

Aufgabe G41 (Ableitung mit Differenzenquotient)

Gegeben seien folgende Funktionen:

(a) $g_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$

(b) $g_b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 2x+1 & \text{falls } x > 0 \\ (x+1)^2 & \text{sonst} \end{cases}$

(c) $g_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \sqrt[n]{|x|}$ mit $n \in \mathbb{N}$

Zeige direkt mit der Definition V.1.2, dass die Funktionen an der Stelle 0 differenzierbar ist und berechne die Ableitung an dieser Stelle.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}\frac{g_a(0+h)-g_a(0)}{h} &= \frac{\frac{h}{1+|h|}-\frac{0}{1+|0|}}{h}\\ &= \frac{\frac{h}{1+|h|}}{h}\\ &= \frac{h}{(1+|h|)h}\\ &= \frac{1}{(1+|h|)}\\ &\longrightarrow \frac{1}{(1+|0|)} = 1\end{aligned}$$

Also ist g_a an der Stelle 0 differenzierbar und es gilt: $g_a'(0) = 1$.

(b) Rechtsseitiger Grenzwert ($h > 0, h \to 0$):

$$\begin{aligned}\frac{g_b(0+h)-g_b(0)}{h} &= \frac{(2h+1)-(2\cdot 0+1)}{h}\\ &= \frac{2h}{h}\\ &= 2\\ &\longrightarrow 2\end{aligned}$$

Der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ist also 2.
Linksseitiger Grenzwert ($h < 0, h \to 0$):

$$\begin{aligned}\frac{g_b(0+h)-g_b(0)}{h} &= \frac{(h+1)^2-(0+1)^2}{h}\\ &= \frac{h^2+2h}{h}\\ &= h+2\\ &\longrightarrow 0+2 = 2\end{aligned}$$

Der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ist also auch 2.
Also ist g_b an der Stelle 0 differenzierbar und es gilt: $g_b'(0) = 2$.

(c)

$$\begin{aligned}\frac{g_c(0+h)-g_c(0)}{h} &= \frac{h\cdot\sqrt[n]{|h|}-0\cdot\sqrt[n]{|0|}}{h}\\ &= \frac{h\cdot\sqrt[n]{|h|}}{h}\\ &= \sqrt[n]{|h|}\\ &\longrightarrow \sqrt[n]{|0|} = 0\end{aligned}$$

Also ist g_c an der Stelle 0 differenzierbar und es gilt: $g_c'(0) = 0$.

Aufgabe G42 (Gleichmäßige Konvergenz)

(a) Zeige: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto e^{t-n}$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig.

(b) Zeige: Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $g_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto e^{-(t+n)}$ konvergiert gleichmäßig, Bestimme von jedem g_n die Supremumsnorm.

(c) Zeige: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ konvergiert gleichmäßig. Gib die Grenzfunktion explizit an.

Lösung:

(a) Zuerst zeigen wir die punktweise Konvergenz. Sei $t \in [0,+\infty[$ beliebig. Dann gilt:

$$f_n(t) = e^{t-n} = e^t \cdot e^{-n} = e^t \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Die Folge $\left(\frac{1}{e}\right)^n$ ist eine geometrische Folge mit Basis $\frac{1}{e} < 1$ und konvergiert gegen 0. Der erste Term e^t ist konstant bezüglich der Variablen n.

Somit konvergiert $f_n(t)$ punktweise gegen die konstante 0-Funktion.

Wäre die Konvergenz gleichmäßig, dann würde für $\varepsilon := 1$ ein N_ε existieren, sodass für alle $n \geq N_\varepsilon, x \in [0,+\infty[$ gelten würde, dass der Abstand zwischen $f_n(x)$ und 0 kleiner als $\varepsilon = 1$ wäre. Dies ist aber nicht der Fall, da für den Spezialfall $x = n$ immer gilt, dass $f_n(n) = e^{n-n} = e^0 = 1$. Es lässt sich also immer ein x finden, sodass der Abstand von f_n zur 0-Funktion an dieser Stelle nicht kleiner 1 ist.

(b) Zuerst zeigen wir die punktweise Konvergenz. Sei $t \in [0,+\infty[$ beliebig. Dann gilt:

$$g_n(t) = e^{-(t+n)} = e^{-t} \cdot e^{-n} = e^{-t} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Die Folge $\left(\frac{1}{e}\right)^n$ ist eine geometrische Folge mit Basis $\frac{1}{e} < 1$ und konvergiert gegen 0. Der erste Term e^{-t} ist konstant bezüglich der Variablen n.

Somit konvergiert $g_n(t)$ punktweise gegen die konstante 0-Funktion.

Nun zeigen wir die gleichmäßige Konvergenz, indem wir die Supremumsnorm ausrechnen:

$$\begin{aligned} \|g_n\| &= \sup\{g_n(t) : t \in [0,+\infty[\} \\ &= \sup\{e^{-(t+n)} : t \in [0,+\infty[\} \\ &= e^{-(0+n)} = \left(\frac{1}{e}\right)^n. \end{aligned}$$

Dies ist der Fall, weil $t \mapsto e^{-(t+n)}$ monoton fallend ist und somit sein Supremum am linken Endpunkt $t = 0$ annimmt.

Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen 0, weil die reelle Folge $\|g_n - 0\| = \|g_n\| = \left(\frac{1}{e}\right)^n$ gegen 0 konvergiert.

(c) Wir verwenden den Konvergenzsatz von Weierstraß (Satz IV.2.11): Dieser besagt, dass eine Reihe von beschränkten Funktionen gleichmäßig konvergiert, falls die Reihe der Normen konvergiert. Berechnen wir also:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

Diese Reihe ist eine geometrische Reihe und konvergiert, weil $\left|\frac{1}{e}\right| = \frac{1}{e} < 1$ ist.

Also dürfen wir Satz IV.2.11 anwenden und erhalten die gleichmäßige Konvergenz der Reihe gegen eine Funktion $G : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$.

Den Grenzwert kann man hier explizit ausrechnen:
Sei $t \in [0, +\infty[$. Dann ist

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(t+n)} \\ &= e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n \\ &= e^{-t} \frac{1}{1-\frac{1}{e}} \\ &= \frac{e}{e-1} \cdot e^{-t}. \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H45 (Differenzenquotienten)
Zeige mit Definition V.1.2, dass die folgenden Funktionen nicht differenzierbar sind:

(a) $f_a :]-2,2[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto |t+1|$

(b) $f_b :]-2,2[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \sqrt{|t-1|}$

(c) $f_c :]-2,2[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } t = 0 \\ \frac{t}{|t|} & \text{sonst} \end{cases}$

(d) $f_d :]-2,2[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} t^3 & \text{falls } t \geq 1 \\ t & \text{sonst} \end{cases}$

(e) $f_e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[n]{|x|}$ mit $n \in \mathbb{N}$

Lösung:

(a) Behauptung: $f_a :]-2,2[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto |t+1|$ ist nicht differenzierbar an der Stelle $t = -1$:

$$\begin{aligned} \frac{f_a(-1+h) - f_a(-1)}{h} &= \frac{|(-1+h)+1| - |(-1)+1|}{h} \\ &= \frac{|h|}{h} \end{aligned}$$

Dies ist gleich $+1$, wenn $h > 0$ und gleich -1, wenn $h < 0$. Somit existiert der Grenzwert nicht und f_a ist nicht an der Stelle $t = -1$ differenzierbar.

(b) Behauptung: $f_b :]-2,2[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \sqrt{|t-1|}$ ist nicht differenzierbar an der Stelle $t = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{f_b(1+h) - f_b(1)}{h} &= \frac{\sqrt{|(1+h)-1|} - \sqrt{|1-1|}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{|h|}}{h} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck divergiert, wenn $h \to 0$, da $\left|\frac{\sqrt{|h|}}{h}\right| = \frac{1}{\sqrt{|h|}} \to \infty$. Somit existiert der Grenzwert nicht und f_b ist nicht an der Stelle $t = 1$ differenzierbar.

(c) $f_c :]-2,2[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } t = 0 \\ \frac{t}{|t|} & \text{sonst} \end{cases}$ ist nicht stetig an der Stelle $t = 0$ und somit erstrecht nicht differenzierbar.

(d) Behauptung: $f_d :]-2,2[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} t^3 & \text{falls } t \geq 1 \\ t & \text{sonst} \end{cases}$ ist nicht differenzierbar an der Stelle $t = 1$: Rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten($h > 0, h \to 0$):

$$\begin{aligned} \frac{f_d(1+h) - f_d(1)}{h} &= \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} \\ &= \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} \\ &= 3 + 3h + h^2 \\ &\longrightarrow 3 \end{aligned}$$

Der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ist also 3.
Linksseitiger Grenzwert ($h < 0, h \to 0$):

$$\begin{aligned} \frac{f_d(1+h) - f_d(1)}{h} &= \frac{(h+1) - 1}{h} \\ &= 1 \\ &\longrightarrow 1 \end{aligned}$$

Der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ist also 1.
Die beiden einseitgen Grenzwerte stimmen also nicht überein und somit existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht. Also ist f_d nicht an der Stelle $t = 1$ differenzierbar.

(e) Behauptung: $f_e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[n]{|x|}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist nicht differenzierbar an der Stelle $t = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f_e(0+h) - f_e(0)}{h} &= \frac{\sqrt[n]{|h|} - \sqrt[n]{|0|}}{h} \\ &= \frac{\sqrt[n]{|h|}}{h} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck divergiert, wenn $h \to 0$, da $\left| \frac{\sqrt[n]{|h|}}{h} \right| = \frac{1}{|h|^{(1-\frac{1}{n})}} \to \infty$. Somit existiert der Grenzwert nicht und f_b ist nicht an der Stelle $t = 1$ differenzierbar.

Aufgabe H46 (Konvergenzradius)

Bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$$

Lösung: Sei $z \in \mathbb{C}$. Um zu sehen, ob die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^n}{n!} z^n}_{b_n :=}$$

konvergiert, wenden wir das Quotientenkriterium an:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| &= \left|\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}z^{n+1}}{\frac{n^n}{n!}z^n}\right| \\
&= \frac{\left|(n+1)^{n+1}\cdot z^{n+1}\cdot n!\right|}{\left|(n+1)!\cdot n^n\cdot z^n\right|} \\
&= \frac{(n+1)^n(n+1)\cdot|z|^n|z|\cdot n!}{(n+1)n!\cdot n^n\cdot|z|^n} \\
&= \frac{(n+1)^n\cdot|z|\cdot}{n^n} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot|z| \\
&\longrightarrow e\cdot|z|.
\end{aligned}$$

Wir wissen nun, dass die Reihe konvergiert, falls $e\cdot|z|<1$ ist und dass sie divergiert, wenn $e\cdot|z|>1$ ist. Das heißt: Für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|<\frac{1}{e}$ konvergiert die Reihe und für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|>\frac{1}{e}$ divergiert die Reihe.
Also ist der Konvergenzradius $\frac{1}{e}$.

Aufgabe H47 (Nicht explizit hinschreibbare Umkehrfunktion)
Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto x+x^5-3$. Zeige, dass f bijektiv ist und dass $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Was ist die Ableitung von f^{-1} an der Stelle -3 ?

Lösung: Die Funktionen $x\mapsto x$, $x\mapsto x^5$ und $x\mapsto -3$ sind alle stetig und monoton wachsend, folglich ist auch f stetig und monoton wachsend. Da die ersten beiden Summanden sogar streng monoton wachsen, gilt dies auch für f. Also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv.
Surjektivität: Da f stetig auf einem Intervall ist, muss das Bild auch ein Intervall sein. Für $x\to+\infty$ geht auch $f(x)\to+\infty$ und somit ist das Intervall nach oben unbeschränkt. Für $x\to-\infty$ gilt analog, dass $f(x)\to-\infty$. Somit ist das Intervall in beide Richtungen unbeschränkt und muss gleich $\mathbb{R}$ sein.
Also ist f surjektiv.
Folglich ist f bijektiv.
Weiterhin wissen wir, dass f differenzierbar ist: Die Ableitung ist $f'(x)=1+5x^4$ und immer positiv, weil $x^4\geq 0$ für reelle Zahlen x gilt.
Wir können somit Satz V.1.11 anwenden und wissen, dass auch f^{-1} immer differenzierbar ist und dass folgende Formel gilt:

$$\left(f^{-1}\right)'(f(p))=\frac{1}{f'(p)}.$$

Wenn wir $p:=0$ einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'(f(0)) &= \frac{1}{f'(0)} \\
\left(f^{-1}\right)'(-3) &= \frac{1}{1}=1.
\end{aligned}$$

Aufgabe H48 (Sekanten- und Tangentensteigung)
(a) Sei $a<c$ und $f:[a,c]\longrightarrow\mathbb{R}:t\mapsto t^2$. Gib ein $b\in]a,c[$ an mit

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(b)$$

(b) Tue das gleiche für $f : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{t}$ mit $0 < a < c$.

Lösung:

(a) Die linke Seite der Gleichung lautet:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{c^2 - a^2}{c - a} = \frac{(c - a)(c + a)}{c - a} = c + a$$

Aus $f(t) = t^2$ folgt $f'(t) = 2t$. Das heißt die rechte Seite der Gleichung wird einfach zu

$$2b$$

Wir müssen also die Gleichung

$$c + a = 2b$$

nach b auflösen. Das Ergebnis ist dann einfach $\frac{c+a}{2}$, das arithmetische Mittel der beiden Endpunkte des Definitionsintervalls.

(b) Die linke Seite der Gleichung lautet:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}}{c - a} = \frac{\frac{a-c}{ac}}{c - a} = -\frac{1}{ac}.$$

Aus $f(t) = \frac{1}{t}$ folgt $f'(t) = -\frac{1}{t^2}$. Das heißt die rechte Seite der Gleichung wird somit zu

$$-\frac{1}{b^2}$$

Wir müssen also die Gleichung

$$-\frac{1}{ac} = -\frac{1}{b^2}$$

nach b aufloesen, d.h. wir müssen $b^2 = ac$ nach b aufloesen. Da a und c echt größer 0 sind und b zwischen a und c liegen soll, heißt das für b, dass b auch positiv ist. Somit gilt:

$$b = \sqrt{ac}$$

(Dies nennt man auch das geometrische Mittel von a und c.)