Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007
Übung 11, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 35 (Zum Aufwärmen).

(a) Die Funktion $f : [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig und es gilt $f(-1) = -1$ sowie $f(1) = 1$. Allerdings nimmt f nicht den Wert 0 an. Ist dies ein Widerspruch zum Zwischenwertsatz?

(b) Herr X bereitet sich nach seiner Analysis I Vorlesung einen frischen Tee zu, stürzt ihn gierig herunter und verbrennt sich hierbei heftig den Mund. Frustriert wartet er eine halbe Stunde ab und muss feststellen, dass der Tee kalt und langweilig geworden ist. War der Tee zu irgendeiner Zeit genießbar?

(a) Dies ist kein Widerspruch zum Zwischenwertsatz, da $[-1,1]\setminus\{0\}$ *kein Intervall ist.*

(b) Geht man davon aus, dass der Temperaturverlauf sinnvollerweise als stetige Funktion der Zeit beschrieben werden kann-wie bei physikalischen Grössen typischerweise der Fall ist-dann folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass der Tee irgendwann einmal die optimale Trinktemperatur gehabt haben muss.

G 36 (Ein praktisches Maximierungsproblem).

Entfernt man aus einem kreisförmigen Stück Papier ein Kreissegment der Bogenlänge α, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, so entsteht durch zusammenfügen der Schnittkanten ein Kegel. Begründe, dass für ein geeignetes $\alpha \in [0, 2\pi]$ das Volumen des entstehenden Kegels maximal wird.

Das Kegelvolumen lässt sich beschreiben als stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. *Nach dem Satz vom Maximum nimmt* f *ein Maximum auf* $[0, 2\pi]$ *an. Wegen* $f(0) = f(2\pi) = 0$ *und* $f(\alpha) > 0$ *für alle* $\alpha \in]0.2\pi[$ *nimmt* f *sein Maximum sogar auf* $]0, 2\pi[$ *an.*

G 37 (Stetige Funktionen).

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass $f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine rationale Zahl ist. Zeige, dass in diesem Fall f konstant ist.

Angenommen f *wäre nicht konstant . Dann existieren* $x, y \in \mathbb{R}$ *mit* $f(x) < f(y)$. *Nun liegen im Intervall* $[f(x), f(y)]$ *überabzählbar viele irrationale Zahlen, die nach dem Zwischenwertsatz alle als Funktionswert angenommen werden, im Widerspruch zur Voraussetzung.*

G 38 (Gleichmäßige Stetigkeit).

Zeige, dass die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig auf $[0, 1]$ und auf $[0, +\infty[$ ist.

(i) Aus der Stetigkeit der Wurzelfunktion und Satz IV.1.25 aus der Vorlesung folgt die gleichmässige Stetigkeit auf $[0,1]$.

(ii) Da $[0,+\infty[=[0,1]\cup[1,+\infty[$, *genügt es die gleichmässige Stetigkeit auf* $[1,+\infty[$ *nachzuweisen: Wähle* $x,y\in[1,+\infty[$. *Dann gilt* $|\sqrt{x}+\sqrt{y}|\geq 2$ *und somit*

$$|x-y|=|\sqrt{x}-\sqrt{y}||\sqrt{x}+\sqrt{y}|\geq 2|\sqrt{x}-\sqrt{y}|.$$

Folglich gilt

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq\frac{1}{2}|x-y|.$$

Für $\epsilon>0$ *wähle* $\delta=2\epsilon$. *Dann gilt* $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq\epsilon$ *für alle* $x,y\in[1,+\infty[$ *mit* $|x-y|\leq\delta$.

G 39 (Punktweise Konvergenz vs. gleichmäßige Konvergenz).

Wir betrachten die stetigen Funktionen $f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x):=\sqrt[n]{x}$ für $n\in\mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass für jedes $x\in[0,1]$ der Grenzwert $f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ existiert, und berechne ihn. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also punktweise gegen f.

(b) Ist die Grenzfunktion f stetig?

(c) Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f?

(a) Für $x\in]0,1]$ *ist* $x>0$ *und somit* $f(x):=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=1$ *nach Lemma III.4.10. Für* $x=0$ *ist* $\sqrt[n]{x}=0$ *für alle* $n\in\mathbb{N}$ *und somit* $f(0)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=0$.

(b) Die Funktion f *ist offensichtlich unstetig (z.B. ist* $\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=1\neq 0=f(0)$*).*

(c) Wäre die Konvergenz gleichmäßig, so müsste wegen der Stetigkeit der Funktionen f_n *auch die Grenzfunktion* f *stetig sein (Satz IV.1.12). Dies aber ist nach (b) nicht der Fall. Also kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.*

Hausübung

H 41 (Eine weitere Eigenschaft stetiger Funktionen).

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $p \in D$ mit $f(p) \neq 0$. Dann ist $f(x) \neq 0$ für alle x in einer Umgebung von p, d.h. es existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$f(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - p| < \delta.$$

Zu $\epsilon := |f(p)| > 0$ existiert nach Voraussetzung ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(p)| < \epsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$. Daraus folgt $|f(x)| \geq |f(p)| - |f(x) - f(p)| > 0$ für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$.

H 42 (Satz über die Umkehrfunktion).

Betrachte die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$. Bestimme $f(\mathbb{R})$, begründe die Existenz einer stetigen Umkehrfunktion $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ und gib diese explizit an.

Zunächst zeigen wir, dass f streng monoton wachsend ist. Sei dazu $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Es sind drei Fälle zu untersuchen:

(i) $x, y \geq 0$. *Dann gilt*

$$f(x) - f(y) = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} < 0.$$

(ii) $x, y \leq 0$. *Dann gilt*

$$f(x) - f(y) = \frac{x}{1-x} - \frac{y}{1-y} = \frac{x-y}{(1-x)(1-y)} < 0.$$

(iii) $x \leq 0$ *und* $y \geq 0$. *Dann gilt*

$$f(x) = \frac{x}{1-x} \leq 0 < f(y) = \frac{y}{1+y}.$$

Somit ist die Funktion f streng monoton wachsend. Aus der Stetigkeit von f folgt aus Lemma IV.1.20 im Skript, dass f injektiv ist. Weiterhin gilt $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$. Der Satz über die Umkehrfunktion liefert uns nun die (streng monotone) stetige Umkehrfunktion

$$f^{-1} :]-1, 1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{1-|x|}.$$

H 43 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen).

Untersuche die jeweilige Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n \colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ auf punktweise sowie auf gleichmäßige Konvergenz. Berechne gegebenenfalls die Grenzfunktion f.

(a) $f_n(x) := \frac{x}{1+nx}$;

(b) $f_n(x) := \frac{1}{1+nx}$.

(a) Es ist $f_n(0) = 0$ für alle n und somit $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Für $x > 0$ gilt $0 \le \frac{x}{1+nx} \le \frac{x}{nx} = \frac{1}{n}$, unabhängig von x. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so finden wir $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Für alle $n \ge n_0$ und alle $x \in [0, \infty[$ gilt dann $|\frac{x}{1+nx} - 0| \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Wir haben gezeigt, dass $\frac{x}{1+nx} \to 0$ gleichmäßig.

(b) Es gilt $f_n(0) = 1$ für alle n, somit $f(0) := \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. Für $x > 0$ hingegen haben wir $f(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0$. Da die Grenzfunktion f der punktweise konvergenten Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen unstetig ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein (Satz IV.2.12).

H 44 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen).

Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ mit $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}$ konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Berechne $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Ist die Konvergenz gleichmäßig?

(a) Es gilt $f_n(0) = 0$ für jedes n, folglich $f(0) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) = 0$. Für $x \neq 0$ berechnen wir

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x \cdot (1+x^2)}{x^2} = \frac{1+x^2}{x}$$

unter Benutzung der geometrischen Summenformel.

(b) Es gilt $f(0) = 0$, jedoch $f(x) \to \infty$ für $x \to 0_+$ nach voriger Formel. Also ist die Grenzfunktion f unstetig. Da jedes f_n stetig ist, kann die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen f konvergieren (Satz IV.2.12).