Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2007
20.7.2007

10. Übungsblatt zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Aufgaben und Lösungen

Gruppenübung

Aufgabe G31 (Epsilon-Delta-Stetigkeit)
Sei $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto \sqrt{x}$ die Wurzelfunktion. Zeige direkt mit der Definition IV.1.1., dass f an der Stelle $p = 0$ stetig ist. (Anmerkung: f ist natürlich überall stetig, aber für jetzt soll uns einmal $p = 0$ genügen.)

Lösung: Informelle Vorüberlegung:
Um Stetigkeit an der Stelle $p = 0$ zu zeigen, ist es notwendig, den Abstand von $f(x)$ zu $f(0)$ abzuschäetzen:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= \left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| \\ &= \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Damit dies kleiner als ein ε werden soll, muss x kleiner als ε^2 sein, weil $\left(\sqrt{x} < \varepsilon \iff x < \varepsilon^2\right)$.
Formaler Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.
Setze $\delta := \varepsilon^2$.
Sei $x \in [0, +\infty[$ mit $|x - 0| < \delta$.
Weil $\delta = \varepsilon^2$ ist und $x \geq 0$, gilt demnach $x = |x| = |x - 0| < \delta = \varepsilon^2$. Also ist $x < \varepsilon^2$.
Nun wiederholen wir obige Rechnung:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= \left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| \\ &= \sqrt{x} \\ &< \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also haben wir gerade eben gezeigt:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [0, +\infty[)|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon.$$

Also ist f stetig an der Stelle $p = 0$.

Aufgabe G32 (Herr X. Fortsetzung)
Herr X. erklärt auf seiner populären Mathe-Website (weltbekannt aus Aufgabe (H21)) auch, was stetige Funktionen sind. Als Beispiel für eine nicht-stetige Funktion gibt er die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$

an, weil ihr Graph aus zwei nichtverbundenen Teilstücken besteht und sich nicht zeichnen lässt, ohne den Stift vom Papier zu nehmen.
Stimmt diese Auffassung mit unserer Definition von Stetigkeit überein?

Lösung: Nun, das erste Problem ist, dass Herr X. nicht sagt, auf welchem Definitionsbereich die Funktion f definiert ist. Wir gehen deshalb davon aus, dass er ganz $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ meint, denn der Ausdruck $\frac{1}{x}$ ist ja für die 0 nicht definiert.
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\{0\} : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist aber stetig nach Beispiel IV.1.8.
Was Herr X gemeint haben könnte, ist, dass man f nicht auf ganz $\mathbb{R}$ stetig fortsetzen kann, das ist aber etwas ganz anderes.

Aufgabe G33 (noch mehr Epsilon-Delta-Stetigkeit)
Sei $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} : z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ die Funktion, die jeder komplexen Zahl ihren Realteil zuweist. Zeige direkt mit der Definition IV.1.1., dass $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ stetig ist.
(Hinweis1: Es gilt: $(\forall z, w \in \mathbb{C})\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)$.)
(Hinweis2: Benutze Ungleichung (H23 a).)

Lösung: Eine Funktion heißt „stetig", wenn sie an jedem Punkt im Definitionsbereich stetig ist, also in diesem Fall an jedem $p \in \mathbb{C}$.
Sei also $p \in \mathbb{C}$ beliebig.
Sei nun $\varepsilon > 0$.
Wir setzen nun $\delta := \varepsilon$.
Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - p| < \delta$.

Nun wollen wir $|\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Re}(p)|$ abschätzen. Nach dem Hinweis ist dies das Gleiche wie $|\mathrm{Re}(z-w)|$. Und nach der Ungleichung aus $(H23a)$ ist der Betrag des Realteils immer kleiner oder gleich dem Betrag der Zahl, also gilt:

$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(p)| &= |\mathrm{Re}(z - p)| \\ &\leq |z - p| \\ &< \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also haben wir gezeigt:

$$(\forall p \in \mathbb{C})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \mathbb{C})|z - p| < \delta \Rightarrow |\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(p)| < \varepsilon$$

Das war zu zeigen.

Aufgabe G34 (Konvergenzradius einer Potenzreihe)
Finde den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 5}{n + 4} \cdot z^n$$

(Hinweis: Benutze das Quotientenkriterium.)

Lösung: Sei $z \in \mathbb{C}$. Um zu sehen, ob die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{3^n + 5}{n + 4} \cdot z^n}_{b_n :=}$$

konvergiert, wenden wir das Quotientenkriterium an:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| &= \frac{\left(3^{n+1}+5\right)|z|^{n+1}(n+4)}{(n+1+4)\left(3^n+5\right)|z|^n} \\
&= \frac{3^{n+1}+5}{3^n+5}\cdot\frac{|z|}{1}\frac{n+4}{n+5} \\
&= \underbrace{\frac{3+5\cdot 3^{-n}}{1+5\cdot 3^{-n}}}_{\to 3}\cdot|z|\cdot\underbrace{\frac{1+4\cdot\frac{1}{n}}{1+5\cdot\frac{1}{n}}}_{\to 1}\to 3\cdot|z|.
\end{aligned}
$$

Wir wissen nun, dass die Reihe konvergiert, falls $3|z| < 1$ ist und dass sie divergiert, wenn $3|z| > 1$ ist. Das heißt: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{3}$ konvergiert die Reihe und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \frac{1}{3}$ divergiert die Reihe.
Also ist der Konvergenzradius $\frac{1}{3}$.

Hausübung

Aufgabe H37 (Unstetigkeit)
Die charakteristische Funktion des Intervalls $[3, 4]$ ist definiert als:

$$
f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [3,4], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

Zeige mit Hilfe des Folgenkriteriums für Stetigkeit (Satz IV.1.3), dass die Funktion f an den Stellen 3 und 4 nicht stetig ist.

Lösung: Unstetigkeit an der Stelle 0:
Sei $a_n := 3 - \frac{1}{n}$. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 3. Wäre f stetig an der Stelle 3, dann würde auch $f(a_n)$ gegen $f(3)$ konvergieren.
Da aber alle Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht im Intervall $[3, 4]$ liegen, ist $f(a_n) = 0$. Der Funktionswert an der Stelle 3 dagegen ist $f(3) = 1$, weil $3 \in [3, 4]$. Widerspruch.

Unstetigkeit an der Stelle 1:
Sei $b_n := 4 + \frac{1}{n}$. Dann konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 4. Wäre f stetig an der Stelle 4, dann würde auch $f(b_n)$ gegen $f(4)$ konvergieren. Da aber alle Glieder der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht im Intervall $[3, 4]$ liegen, ist $f(b_n) = 0$. Der Funktionswert an der Stelle 4 dagegen ist $f(4) = 1$, weil $4 \in [3, 4]$. Widerspruch.

Aufgabe H38 (die Exponentialfunktion)
Im Satz III.4.18 wurde die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit Hilfe einer Reihe *definiert.*

(a) Zeige nur mit Hilfe dieses Satzes, dass $(\forall k \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C})\, \exp(kz) = (\exp(z))^k$.

(b) Zeige, dass dies sogar für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Achtung: „ $\exp(kz) = e^{kz} = (e^z)^k = (\exp(z))^k$ " ist noch kein Beweis!

Lösung:

(a) Vollständige Induktion nach $k \in \mathbb{N}$. Wir beginnen mit $k = 1$: $\exp(kz) = \exp(1 \cdot z) = \exp(z) = (\exp(z))^1 = (\exp(z))^k$.

Nehmen wir nun an, die Aussage sei für ein $k \in \mathbb{N}$ bewiesen. Wir zeigen sie nun für $k+1$:

$$\begin{aligned}\exp((k+1)z) &= \exp(kz+z) \\ &= \exp(kz)\cdot\exp(z) \text{ nach Satz III.4.18.(1)} \\ &= (\exp(z))^k \cdot \exp(z) \\ &= (\exp(z))^{k+1}.\end{aligned}$$

(b) Sei $k \in \mathbb{Z}$.
Für $k \geq 1$ haben wir das in (a) schon bewiesen.
Für $k = 0$ ist $\exp(kz) = \exp(0) = 1 = (\exp(z))^0 = (\exp(z))^k$. Der entscheidende Schritt $\exp(0) = 1$ folgt aus der Definition der Reihe:

$$\exp(0) = \underbrace{\frac{0^0}{0!}}_{=1} + \underbrace{\frac{0^1}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \cdots}_{=0}$$

Für $k < 0$ ist $k = -|k|$ mit $|k| \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\exp(kz) = \exp(-|k|z) = (\exp(|k|z))^{-1} = \left((\exp(z))^{|k|}\right)^{-1} = (\exp(z))^{-|k|} = (\exp(z))^k.$$

Hierbei haben wir zuerst Satz III.4.18.(2) verwendet und anschließend den in (a) bereits bewiesenen Fall.

Aufgabe H39 (Epsilon-Delta-Stetigkeit)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Zeige direkt mit Definition IV.1.1, dass diese Funktion an der Stelle $p = 1$ stetig ist. (Hinweis: Setze $\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\}$.)

Lösung: formaler Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$.
Setze $\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\}$
Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < \delta$.
Dann ist insbesondere $-1 < x-1 < 1$ und damit $0 < x < 2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(p)| &= |x^2-1^2| \\ &= |(x-1)(x+1)| \\ &= |x-1|\cdot|x+1| \\ &= |x-1|\cdot(x+1) \\ &\leq |x-1|\cdot(2+1) \\ &< \delta\cdot 3 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}\cdot 3 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Aufgabe H40 (Stetigkeit und Offene Mengen)
Zeige nur mit Hilfe von Satz IV.1.4, dass die Funktion f aus Aufgabe (H37) nicht stetig sein kann, indem du eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ findest, deren Urbild unter f nicht offen ist.

Lösung: Die Menge $U :=]0,2[\subseteq \mathbb{R}$ ist ein offenes Intervall und somit offen. Das Urbild $f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in U\}$ besteht aus allen reellen Zahlen, die auf Zahlen größer 0 und kleiner 2 abgebildet werden. Da die Funktion aber nur die Werte 0 und 1 annimmt, ist dies genau die Menge der Zahlen, die auf 1 abgebildet werden, d.h. $f^{-1}(U) = f^{-1}(\{1\}) = [3,4]$. Diese Menge ist nicht offen, denn die beiden Randpunkte darin besitzen keine ε-Umgebung, die noch ganz in $[3,4]$ enthalten ist.