Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007
Übung 9, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 28 (Konvergenz konkreter Beispiele von Reihen).

Welche der folgenden Reihen sind beschränkt, konvergent bzw. absolut konvergent ?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n;$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n;$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{2n^2};$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n+5}.$

(a) Da $(-1)^n$ für $n \to \infty$ nicht gegen 0 konvergiert, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ nicht konvergent. Die n-te Partialsumme dieser Reihe ist

$$S_n = (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{für gerades } n \\ -1 & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

(da sich benachbarte Summanden geeignet auslöschen). Die Folge der Partialsummen ist also beschränkt und somit ist $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ eine beschränkte Reihe.

(b) Da die Summanden $(-2)^n$ für $n \to \infty$ nicht gegen 0 gehen, ist die Reihe divergent. Für gerades n ist die n-te Partialsumme

$$S_n \;=\; \underbrace{(-2)+4}_{=2} + \underbrace{(-8)+16}_{=8} + \underbrace{(-32)+64}_{=32} + \cdots + \underbrace{(-2^{n-1})+2^n}_{=2^{n-1}} \;\geq\; 2^{n-1}\,.$$

Die Folge der Partialsummen ist somit unbeschränkt und folglich $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n$ keine beschränkte Reihe.

(c) Die Summanden sind von der Form $(-1)^n a_n$, wobei $a_n := \frac{n+2}{2n^2} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2}$ nichtnegativ ist und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Nach dem Leibnizkriterium ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{2n^2}$ also konvergent (und somit auch beschränkt). Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{2n^2}$ ist jedoch nicht absolut konvergent—wir geben zwei Beweise.

1. Beweis: Da $a_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2}$, ist $a_n - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2n}$. Wäre $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n^2}$ absolut konvergent, so wäre auch $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ konvergent als Differenz zweier konvergenter Reihen. Diese Reihe aber ist das Zweifache der divergenten harmonischen Reihe und somit divergent, Widerspruch.

2. Beweis: Da $a_n \geq \frac{1}{n}$, ist die harmonische Reihe eine divergente Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und somit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem in der nächsten Aufgabe bewiesenen Minorantenkriterium divergent.

(d) Da $\frac{2^n+1}{3^n+5} \leq \frac{2^n+1}{3^n} \leq \frac{2^n+2^n}{3^n} = 2 \cdot (\frac{2}{3})^n$*, ist das Doppelte einer (nach Satz III.3.3 (b)) konvergenten geometrischen Reihe mit* $q = \frac{2}{3}$ *eine Majorante für die zu untersuchende Reihe. Nach dem Majorantenkriterium ist die Reihe also absolut konvergent (und somit auch konvergent und beschränkt).*

G 29 (Test).

Trage die Implikationspfeile $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ zwischen den Feldern ein.
Begründe deine Wahl!

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ genügt Quotientenkriterium}}$

$\boxed{\text{Die Partialsummen } \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ sind beschränkt}}$

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}}$

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}}$

$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ konvergiert}}$

$\boxed{\sum_{k=n}^{m} a_k \text{ genügt Cauchykriterium}}$

Wurde in der Übung vorgerechnet. Bei Bedarf kann man eine handschriftliche Musterloesung bei mir im Buero abholen.

G 30 (Wo steckt der Fehler?).

Prüfe den folgenden Beweis.

Behauptung: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ konvergiert.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ konvergiert. Dann gilt:

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0+0+0+\ldots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 1-1+1-1+1-\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.$$

Die erste Reihe ist nicht absolut konvergent. Durch Weglassen der Klammern erhält man eine divergente Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 + 0 + 0 + \ldots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots \neq \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

Hausübung

H 33 (Konvergenz von Reihen).

Überprüfe die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ auf Konvergenz für:

$$a_n = \frac{n^2+2n}{7n^2+3n+1} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{i^n}{n}$$

Hinweis: Eine Reihe komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn sowohl ihr Realteil als auch Imaginärteil konvergiert.

Für $a_n = \frac{n^2+2n}{7n^2+3n+1}$ divergiert die Reihe. Denn

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{7} > 0$$

Für $a_n = \frac{i^n}{n}$ konvergiert die Reihe. Denn

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \frac{1}{6} - \frac{i}{7} + \ldots + \frac{i}{4n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{i}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} + \ldots \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots - \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+4} + \ldots + i - \frac{i}{3} + \frac{i}{5} + \ldots + \frac{i}{4n+1} - \frac{i}{4n+3} \ldots \\
&= -\frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}}_{= \ln 2} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}}_{= \frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

Nach Leibniz-Kriterium für alternierende Reihe konvergiert sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil dieser Reihe.
Wie man in späterer Vorlesung feststellen wird, die Reihe konvergiert gegen $-\frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$.

H 34 (Weitere Konvergenzkriterien).

Untersuche die Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz. Ist das vorgeschlagene Kriterium anwendbar?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (Leibnizkriterium ?);

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + (\tfrac{1}{2})^n)$ (Leibnizkriterium ?);

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{2n^2+3}\right)^n$ (Wurzelkriterium ?);

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n!}}$ (Quotientenkriterium ?).

(a) Das Leibnizkriterium ist anwendbar, denn die Summanden sind von der Form $(-1)^n a_n$, wobei $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$ nichtnegativ und monoton fallend ist, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Also ist die Reihe konvergent. Wäre die Reihe absolut konvergent, so wäre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergent, im Widerspruch zu Folgerung III.4.4.

(b) Die Summanden gehen nicht gegen 0 (die Teilfolge der Summanden $1 + (\frac{1}{2})^n$ zu geradem n konvergiert nämlich gegen 1). Also ist die Reihe nach Satz III.3.2 nicht konvergent. Das Leibnizkriterium ist aus dem schon genannten Grund nicht anwendbar.

(c) Für $c_n := \left(\frac{n^2+n+1}{2n^2+3}\right)^n$ gilt $\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{n^2+n+1}{2n^2+3} \to \frac{1}{2}$ für $n \to \infty$. Also ist

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n|} \;=\; \frac{1}{2} \;<\; 1$$

und somit die zu untersuchende Reihe nach dem Wurzelkriterium (Satz III.4.9) konvergent (sogar absolut).

(d) Setze $c_n := \frac{(-2)^n}{\sqrt{n!}} \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \;=\; \frac{2^{n+1}/\sqrt{(n+1)!}}{2^n/\sqrt{n!}} \;=\; \frac{2}{\sqrt{n+1}} \;\to\; 0$$

für $n \to \infty$. Nach dem Quotientenkriterium (Satz III.4.6) ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ somit absolut konvergent (also auch absolut konvergent).

H 35 (Minorantenkriterium).

Beweise das folgende Divergenz-Kriterium durch Zurückführen auf Bekanntes:

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine positive Reihe. Gibt es eine divergente, positive Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ derart, dass $a_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergent.

Welche Information erhält man damit im Falle einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ mit beliebigen komplexen Koeffizienten, wenn $a_n \leq |c_n|$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wie zuvor?

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine divergente Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Wäre $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so wäre noch dem Majorantenkriterium auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, Widerspruch. Also muss auch $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergent sein (was zu zeigen war).

Wenn nun die Summanden c_n komplex sind und $a_n \leq |c_n|$, so zeigt das gerade etablierte Minorantenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ divergiert. Somit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nicht absolut konvergent.

H 36 (Zusatzaufgabe).

Diese Aufgabe hat einen hohen Schwierigkeitsgrad und muss daher nicht bearbeitet werden. Allerdings wird die beste (Teil-) Lösung dieses Problems mit einer Riesentafel Schokolade belohnt. Abgabeschluss dieser Aufgabe ist der 29. Juni 2007.

Von einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ sei bekannt:

$$a_0 = 1 \text{ und } a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass nur eine einzige Folge mit diesen Eigenschaften existiert, und gebe eine explizite Formel für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

Am Dienstag, den 19. Juni 2007, 18.00-20.00 Uhr findet in S 103/221 eine freiwillige

Probeklausur zur Analysis I

statt.
Zugelassene Hilfsmittel sind 4 vorgeschriebene DIN A4 Seiten (2 Blätter!).
Wir empfehlen allen die Teilnahme zur Übung und Selbstkontrolle!

Nicht vergessen!

Hochschulwahlen

11. - 14. Juni von 11.30 - 14 Uhr

Mensa

Lichtbildausweis und Studienausweis sind alles, was du brauchst!