Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
6.6.2007

8. Übungsblatt zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Aufgaben und Lösungen

Gruppenübung

Aufgabe G24 (Geometrische Reihen)

Überprüfe, welche der folgenden Reihen konvergieren und berechne gegebenenfalls ihre Summe

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{3}\right)^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} 13 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}i\right)^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{-n} + \frac{4^n}{3^{2n}}\right)$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{42}\right)^{10-n}$

Lösung:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
Dies ist eine geometrische Reihe mit Basis $\frac{2}{3}$. Sie konvergiert, weil $\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$. Der Grenzwert ist $\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{3}\right)^n$.
Dies ist eine geometrische Reihe mit Basis $\sqrt{3}$. Sie divergiert, weil $\left|\sqrt{3}\right| = \sqrt{3} \geq 1$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} 13 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}i\right)^n$.
Den Faktor 13 kann man nach Satz III.3.4 aus der Reihe ,,herausziehen". Deshalb betrachten wir zuerst die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}i\right)^n$ mit Basis $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}i\right)$. Sie konvergiert, weil $\left|\frac{2}{3} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6} < 1$. Der Grenzwert der Ausgangsreihe ist dann gleich

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} 13 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}i\right)^n &= 13 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}i\right)^n = 13 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}i\right)} \\
&= 13 \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i} = 13 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i\right)}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i\right)} \\
&= 13 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i\right)}{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}} = 13 \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i}{\frac{13}{36}} = 12 + 18i.
\end{aligned}$$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{-n}+\frac{4^n}{3^{2n}}\right)$.
Wir betrachten die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^{2n}}$ getrennt. Wenn wir zeigen können, dass beide Reihen konvergieren, so konvergiert nach Satz III.3.4 auch die Summe und wir können die Grenzwerte addieren.
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ist eine geometrische Reihe mit Basis $\frac{1}{2}$ und konvergiert weil $\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$ ist. Der Grenzwert ist $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{3^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{9^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n$ ist eine geometrische Reihe mit Faktor $\frac{4}{9}$. Sie konvergiert, weil $\left|\frac{4}{9}\right|=\frac{4}{9}<1$. Der Grenzwert ist $\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{5}$.
Der Gesamtgrenzwert ist somit $2+\frac{9}{5}=\frac{19}{5}$.

(e) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{42}\right)^{10-n}$.
Die Folge $\left(\left(\frac{1}{42}\right)^{10-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\frac{1}{42^{10}}\cdot 42^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen 0. Somit ist die Reihe divergent.

Aufgabe G25 (eine Teleskop-Summe)
Für $n\in\mathbb{N}$ sei

$$a_n := \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Untersuche die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Hinweis: Was ist die n-te Partialsumme der Reihe?

Lösung: Wir schreiben die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgermaßen um:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also gegen 0.
Nun untersuchen wir die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: Wir betrachten die n-te Partialsumme der Reihe:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{1}.$$

Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, also ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Aufgabe G26 (Summe)
Zeige:

$$(\forall m,n\in\mathbb{N})m<n\Longrightarrow\sum_{j=m}^{n-1}2^{-j}<2^{-(m-1)}.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{n-1}2^{-j} &= \sum_{k=0}^{n-m-1}2^{-(k+m)}=2^{-m}\sum_{k=0}^{n-m-1}2^{-k}<2^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\\ &= 2^{-m}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2^{-m}\cdot 2=2^{-m+1}=2^{-(m-1)}. \end{aligned}$$

Aufgabe G27 (Cauchy-Folgen)
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X,d) mit der Eigenschaft, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n}.$$

(a) Zeige für alle $n\in\mathbb{N}$: $d(x_n, x_{n+2}) < 2^{-n} + 2^{-(n+1)}$.

(b) Zeige, dass für alle $n\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{N}$ die Abschätzung

$$d(x_n, x_{n+k}) < 2^{-n} + 2^{-(n+1)} + \cdots + 2^{-(n+k-1)}$$

gilt.

(c) Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (X,d) ist. (Hinweis: Nutze Aufgabe (G26).)

Lösung:

(a) In einem metrischen Raum gilt die Dreiecksungleichung. Diese wenden wir an auf die drei Punkte x_n, x_{n+1} und x_{n+2}:

$$d(x_n, x_{n+2}) \le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) < 2^{-n} + 2^{-(n+1)}.$$

(b) Beweis per Induktion über k. Für $k=1$ siehe Aufgabenteil (a).
Induktionsschritt von k auf $k+1$:

$$d(x_n, x_{n+(k+1)}) \le d(x_n, x_{n+k}) + \underbrace{(x_{n+k}, x_{n+(k+1)})}_{<2^{-(n+k)}} < 2^{-n} + 2^{-(n+1)} + \cdots + 2^{-(n+k-1)} + 2^{-(n+k)}.$$

(c) Sei $\epsilon > 0$. Da die Folge $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, gibt es ein $N\in\mathbb{N}$ mit $2^{-N} < \epsilon$. Sei nun $n, m > N$. Dann ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m \le n$. (Ansonsten benennen wir m und n um.) Wir müssen nun zeigen, dass $d(x_m, x_n) < \epsilon$ ist. Für $m = n$ ist der Abstand 0, das ist kleiner ϵ. Sei also nun $m < n$. Dann schreiben wir $n = m + k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und berechnen:

$$d(x_m, x_{m+k}) \;<\; 2^{-m} + 2^{-(m+1)} + \cdots + 2^{-(m+k-1)} = \sum_{j=m}^{m+k-1} 2^{-j} < 2^{-(m-1)} \le 2^{-N} < \epsilon.$$

Hausübung

Aufgabe H29 (Konvergenz und Divergenz von Reihen)
Entscheide, welche der folgenden Reihen konvergiert. Es ist nicht erforderlich, den eventuell existierenden Grenzwert anzugeben.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n!$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2+42n+1}{23(n+1)^2}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-n} + \frac{(-1)^n}{2n}\right)$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{7}{n}$

Lösung:

(a) divergent, weil $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen 0 konvergiert.

(b) divergent, weil $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen 0 konvergiert.

(c) konvergent nach Leibnitz-Kriterium, da die Folge $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend gegen 0 konvergiert. (siehe Aufgabe (G25).)

(d) divergiert, da die Folge $\left(\frac{3n^2+42n+1}{23(n+1)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{3}{23}$ konvergiert und nicht gegen 0.

(e) konvergiert, weil Summe von zwei konvergenten Reihen (der erste Summand ist geometrische Reihe mit Basis $\frac{1}{2}$, der zweite Summand konvergiert wegen Leibnitz-Kriterium).

(f) konvergiert, da diese Reihe nur endlich viele Summanden ungleich Null hat. Somit ist die unendliche Reihe in echt nur eine endliche Summe.

Aufgabe H30 (Endliche Geometrische Reihe)

Sei K ein beliebiger Körper. Seien $a, b \in K$ zwei Körperelemente und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeige folgende Formel:

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

Hinweis: Du kannst dich am Beweis des Satzes III.3.3(a) orientieren.

Lösung:

$$\begin{aligned}
(b-a)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} b\cdot a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a\cdot a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} b^{n-k} \\
&= \left(b^{n+1} + ab^n + a^2b^{n-1} + \cdots + a^{n-1}b^2 + a^n b\right) \\
&\qquad - \left(ab^n + a^2b^{n-1} + a^3b^{n-2} + \cdots + a^n b + a^{n+1}\right) \\
&= b^{n+1} - a^{n+1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe H31 (das Cauchy-Produkt)

Es seien $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq b$ und $|a|, |b| < 1$.

(a) Berechne das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$, d.h. finde die Summanden dieser Reihe. (Hinweis: Nutze die Formel aus Aufgabe (H30).)

(b) Berechne den Grenzwert der Reihe aus (a). Zeige, dass das Produkt der Grenzwerte der beiden geometrischen Reihen gleich dem Grenzwert ihres Cauchy-Produkts ist.

Lösung:

(a) Zuerst einmal überzeugen wir uns davon, dass die beiden Reihen überhaupt absolut konvergieren. Dies ist natürlich der Fall, weil es sich um geometrische Reihen mit Basis a, bzw b handelt und die Beträge nach Voraussetzung echt kleiner als 1 sind. Das Cauchy-Produkt ist definiert als die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k.$$

Da $b \neq a$, d.h. $b - a \neq 0$, lässt sich dies nun umschreiben als

$$= \frac{1}{b-a}\cdot(b-a)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

Nach Aufgabe (H30) ist dies gleich

$$= \frac{1}{b-a}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right).$$

Die Cauchy-Produkt-Reihe ist also gegeben als

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b-a}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right).$$

(b) Die Reihe aus Aufgabenteil (a) lässt sich nach Satz III.3.4 umschreiben zu:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b-a}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right) &= \frac{1}{b-a}\left(\sum_{n=0}^{\infty} b^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{b-a}\left(b\sum_{n=0}^{\infty} b^{n} - a\sum_{n=0}^{\infty} a^{n}\right) \\
&= \frac{1}{b-a}\left(b \cdot \frac{1}{1-b} - a \cdot \frac{1}{1-a}\right) \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b(1-a) - a(1-b)}{(1-b)(1-a)} \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b-a}{(1-a)(1-b)} \\
&= \frac{1}{(1-a)(1-b)} \\
&= \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-b} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^{n}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b^{n}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe H32 (Näherungslösungen für Alternierende Reihen)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Setze $b_n := (-1)^{n+1}a_n$. Sei $m \in \mathbb{N}$ eine *gerade* Zahl.

(a) Zeige: $\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n \geq 0$

(b) Zeige: $\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n \leq a_{m+1}$

(c) Zeige, dass der Abstand zwischen der endlichen Summe $\sum_{n=1}^{m} b_n$ und der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ kleiner gleich a_{m+1} ist.

(d) Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{10^n+n}$, deren Grenzwert man nicht exakt elementar berechnen kann. Wenn man nun nur sechs Summanden der unendlichen Reihe aufaddiert und die restlichen vernachlässigt, dann ist das Ergebnis nicht exakt, sondern nur eine Näherung. Zeige, dass der Fehler (die Differenz zum exakten Ergebnis) kleiner als 10^{-7} ist.

Lösung:

(a) Der erste Summand der Reihe $\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ ist der Term

$$(-1)^{(m+1)+1}a_n = (-1)^{m+2}a_{m+1} = a_{m+1},$$

weil m gerade ist und deshalb $(-1)^{m+2} = 1$ ist. Die Vorzeichen sind immer alternierend, d.h. die Reihe ist von der Form

$$a_{m+1} - a_{m+2} + a_{m+3} - a_{m+4} + \cdots$$

Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung monoton fallend ist, ist jede der Differenzen $(a_{m+1} - a_{m+2}), (a_{m+3} - a_{m+4}), \ldots$ größer gleich 0. Somit ist auch der Grenzwert der Summe größer oder gleich 0.

(b) Wir spalten den ersten Summanden der Reihe, also a_{m+1} ab und schauen uns den Rest an:

$$-a_{m+2} + a_{m+3} - a_{m+4} + a_{m+5} \cdots$$

Diesmal gilt offensichtlich, dass zwei aufeinanderfolgende Zahlen $(-a_{m+2} + a_{m+3})$, $(-a_{m+4} + a_{m+5}), \ldots$ immer kleiner gleich 0 sind. Deshalb ist auch der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=m+2}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \leq 0$. Da wir für diese Überlegung aber den ersten Summanden a_{m+1} weggelassen hatten, addieren wir diesen wieder dazu und erhalten:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^{n+1}a_n \leq a_{m+1}.$$

(c) Wir berechnen den Abstand zwischen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ und der endlichen Summe $\sum_{n=1}^{m} b_n$:

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{m} b_n\Big| = \Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n\Big|$$

Nach Aufgabenteil (a) wissen wir, dass der Term zwischen den Betragsstrichen größer oder gleich 0 ist, wir können sie deshalb weglassen. Nach Aufgabenteil (b) wissen wir, dass der nun verbleibende Ausdruck kleiner oder gleich a_{m+1} ist. Das war zu beweisen.

(d) Eigentlich haben wir in Aufgabenteil (c) schon alles gezeigt. Wir müssen nur noch überprüfen, dass wir die Voraussetzungen der Aufgabe erfüllen:
Wir setzen $a_n := \frac{1}{10^n+n}$ und dementsprechend $b_n := (-1)^{n+1}\frac{1}{10^n+n}$. Die Voraussetzungen sind erfüllt, denn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nichtnegativ, monoton fallend und konvergiert gegen 0. Dies liegt daran, dass $(10^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend gegen $+\infty$ divergieren.
Außerdem setzen wir $m = 6$ und 6 ist gerade.
Nun gilt nach Aufgabenteil (c) die folgende Abschätzung für den Fehler:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{6} b_n\right| \leq a_{6+1} = a_7 = \frac{1}{10^7+7} < \frac{1}{10^7} = 10^{-7}.$$