Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007
Übung 7, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 20 (Rekursive Folge).

Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n$. Zeige, dass diese Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Es gilt $1 \leq a_n \leq 2$: Offenbar gilt $1 \leq a_1 \leq 2$. Nach Induktion gilt also $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n \geq 1$, denn $1 \leq a_n \leq 2$ impliziert insbesondere $a_n \geq 0$. Auerdem gilt nach Induktion $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n \leq 2$, denn $1 \leq a_n \leq 2$ impliziert $\frac{1}{2}a_n \leq 1$.

Die Folge a_n ist monoton wachsend: Wegen $a_n \leq 2$ gilt $\frac{1}{2}a_n \leq 1$, also $a_{n+1} - a_n = 1 - \frac{1}{2}a_n \geq 0$.

Nach Satz $III.2.19(a)$ konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Setze $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$, also $1 + \frac{1}{2}a = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}a_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2}a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a$, woraus $a = 2$ folgt.

s

G 21 (Grenzwert arithmetischer Mittel).

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen, mit Grenzwert $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Zeige, dass für

$$y_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

,

die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen x konvergiert, d.h. $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Hinweis: es ist

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - x\Big| = \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x\Big| = \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x)\Big|\,.$$

Gegeben $\varepsilon > 0$, spalte die Summe rechts geschickt in zwei Anteile auf.

Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Der

Hinweis und die Dreiecksungleichung liefern für $n \geq N$ nun

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - x\Big| &= \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x)\Big| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k - x| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|x_k - x| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\underbrace{|x_k - x|}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}} \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|x_k - x| + \frac{n-N+1}{n}\,\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|x_k - x|}_{<\frac{\varepsilon}{2}\text{ für } n \text{ groß}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
\end{aligned}$$

für $n \geq N$ so groß, dass zudem $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|x_k - x| < \frac{\varepsilon}{2}$.

G 22 (Häufungspunkte, Limes superior und Limes inferior).

Bestimme alle Häufungspunkte der gegebenen reellen Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie ihren Limes superior und Limes interior.

(a) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$;

(b) $x_n = (-1)^n$;

(c) $x_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 1 + 2\cdot(-1)^{\frac{n}{2}} & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$

(a) Da $|x_n| = \frac{1}{n} \to 0$, konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0. Nach Satz III.2.24 (b) ist dann 0 der einzige Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Als konvergente Folge ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Also ist $\limsup x_n < \infty$ und $\liminf x_n > -\infty$ (he Definition III.2.26). Da 0 der einzige Häufungspunkt ist, zeigt Lemma III.2.27 nun, dass $\limsup x_n = \liminf x_n = 0$.

(b) Die Teilfolge $x_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ konvergiert gegen 1, die Teilfolge $x_{2k-1} = -1$ gegen -1. Also sind 1 und -1 Häufungspunkte. Weitere Häufungspunkte gibt es nicht, da $\{1, -1\}$ eine abgeschlossene Menge ist, die alle Folgenglieder enthält. Ist nämlich $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, so gibt es wegen der Offenheit dieser Menge ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \subseteq \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$ und somit $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \cap \{1,-1\} = \emptyset$. Dann gilt für jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \qquad |x_{n_k} - x| \geq \varepsilon$$

und somit konvergiert $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nicht gegen x, d.h. x ist kein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da die Folge beschränkt ist, ist der Limes superior nach Lemma III.2.27 der größte Häufungspunkt (also 1), der Limes inferior der kleinste Häufungspunkt (also -1).

(c) Die Folge nimmt genau drei Werte an (nämlich -1, 0 und 3), und jeden davon unendlich oft. Wie in (b) sehen wir, dass genau -1, 0 und 3 die Häufungspunkte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind, und dass $\limsup x_n = 3$ sowie $\liminf x_n = -1$.

G 23 (Häufungspunkte und Teilfolgen).

(a) Finde eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, welche $\{1,2,3,4,5\}$ als Häufungspunkte hat. Gebe eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ an, die gegen 5 konvergiert (d.h. gebe $n_1 < n_2 < \cdots$ explizit an).

(b) Finde eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, welche alle natürlichen Zahlen als Häufungspunkte hat.

(c) Finde eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, die (mindestens) alle rationalen Zahlen als Häufungspunkte hat.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $x_n := r_n + 1$, wobei $r_n \in \{0,1,2,3,4\}$ der Rest von n bei Division durch 5 ist. Dann ist also

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2,3,4,5,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,1,\ldots).$$

Es ist klar, dass dann $\{1,2,3,4,5\}$ genau die Häufungspunkte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind. Die Teilfolge $(x_{5k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist konstant 5 und konvergiert somit gegen 5.

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge

$$(1;1,2;1,2,3;1,2,3,4;1,2,3,4,5;\ldots)$$

(wobei zwecks besserer Strukturierung einige Kommas als Semikolons geschrieben wurden). Da jede natürliche Zahl unendlich oft als ein x_n vorkommt, ist ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da die Menge $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist (klar ?) und die Folge ihre Werte in $\mathbb{N}$ annimmt, kann es keine weiteren Häufungspunkte außerhalb $\mathbb{N}$ geben (he Lösung der Aufgabe **G23** *(b)).*

(c) Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, gibt es eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist

$$(q_1;q_1,q_2;q_1,q_2,q_3;q_1,q_2,q_3,q_4;\ldots)$$

eine Folge derart, dass jede rationale Zahl unendlich oft als Folgenglied auftritt und somit ein Häufungspunkt ist.

Hausübung

H 25 (Nullfolgen).

Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, d.h. $z_n \to 0$. Zeige, dass dann auch $(b_n z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert ein $M \in]0,\infty[$ derart, dass für all $n \in \mathbb{N}$ gilt $|b_n| \leq M$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $|z_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ für alle $n \geq N$ (da $z_n \to 0$). Für alle $n \geq N$ gilt dann

$$|b_n z_n - 0| \;=\; |b_n z_n| \;=\; |b_n| \cdot |z_n| \;\leq\; M \cdot |z_n| \;<\; M \frac{\varepsilon}{M} \;=\; \varepsilon\,.$$

Also gilt $b_n z_n \to 0$.

H 26 (Satz von Bolzano-Weierstraß im Komplexen).

Zeige, dass jede beschränkte Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen eine konvergente Teilfolge besitzt.

Per Voraussetzung gibt es $M \in [0,\infty[$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|z_n| \leq M$. Sei nun $x_n := \mathrm{Re}(z_n)$, $y_n := \mathrm{Im}(z_n)$. Dann ist wegen $|x_n| = \sqrt{x_n^2} \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n| \leq M$ auch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat die reelle, beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, mit einem Grenzwert $x \in \mathbb{R}$. Wegen $|y_{n_k}| \leq |z_{n_k}| \leq M$ ist dann auch $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge und hat somit eine konvergente Teilfolge $(y_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$, mit einem Limes $y \in \mathbb{R}$. Als Teilfolge von $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist auch $(x_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergent, mit Limes x. Nach Aufgabe **G22** *1. ist nun die Teilfolge $(z_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.*

H 27 (Limes superior und Limes inferior).

(a) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeige, dass

$$\liminf x_n \;\leq\; \limsup x_n$$

(wobei $\liminf = \underline{\lim}$ den Limes inferior meint, $\limsup = \overline{\lim}$ den Limes superior).

(b) Gilt für beliebige beschränkte Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ stets

$$\limsup\,(x_n + y_n) \;=\; \limsup x_n \;+\; \limsup y_n\,?$$

(a) Nach Lemma III.2.27 ist $\liminf x_n$ der kleinste Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es ist $\limsup x_n$ der größte Häufungspunkt dieser Folge. Somit ist $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.

(b) Nein, dies gilt nicht. Als Gegenbeispiel nehmen wir $x_n = (-1)^n$, $y_n = -(-1)^n$. Dann ist $\limsup x_n = \limsup y_n = 1$, aber $x_n + y_n = 0$ für alle n und somit $\limsup\,(x_n + y_n) = 0 \neq 2 = \limsup x_n + \limsup y_n$.

H 28 (Limes superior und Limes inferior).

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und

$$s \;:=\; \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup\{x_m\colon m \geq n\}\,.$$

(a) Zeige, dass $s = \limsup x_n$.

(b) Sei $s_n := \sup\{x_m\colon m \geq n\}$. Zeige, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Folgere, dass

$$\limsup x_n \;=\; \lim_{n\to\infty} s_n\,.$$

Es gilt also $\limsup x_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \sup\{x_m\colon m \geq n\}$.

(a) Definieren wir s_n wie in (b), so ist $s_n \geq x_m$ für alle $m \geq n$, somit $s_n \geq x_m$ für fast alle $m \in \mathbb{N}$. Die Definition des Limes superior $S := \limsup x_n$ als ein Infimum zeigt nun, dass $S \leq s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit auch

$$S \;\leq\; \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n \;= s\,. \tag{1}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung sei $a \in \mathbb{R}$ derart, dass $a \geq x_n$ für fast alle n, etwa $a \geq x_n$ für alle $n \geq N$. Dann ist $a \geq \sup\{x_m\colon m \geq N\} = s_N \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n = s$. Es folgt $S = \inf\{a\colon \text{wie zuvor}\} \geq s$. Also ist $S = s$, wie gewünscht.

(b) Für $n_1 \leq n_2$ ist $\{x_m\colon m \geq n_2\} \subseteq \{x_m\colon m \geq n_1\}$, also $s_{n_1} = \sup\{x_m\colon m \geq n_1\}$ ein obere Schranke für $\{x_m\colon m \geq n_2\}$ und somit $s_{n_1} \geq \sup\{x_m\colon m \geq n_2\} = s_{n_2}$. Also ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge. Per Voraussetzung ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, es gibt also ein $M \in [0,\infty[$ derart, dass $|x_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $s_n = \sup\{x_m\colon m \geq n\} \geq x_n \geq -M$ für alle n und somit ist s_n nach unten beschränkt. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz (Satz III.2.19 (b)) konvergiert $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\inf_{n\in\mathbb{N}} s_n$, es gilt also wie gewünscht

$$s \;=\; \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n \;=\; \lim_{n\to\infty} s_n\,.$$