Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Sommersemester 2007
23.5.2007

6. Übungsblatt zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Aufgaben und Lösungen

Gruppenübung

Aufgabe G17 (Folgen)

Bestimme, welche der untenstehenden Folgen konvergiert und finde in diesem Fall den Grenzwert.

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{4n^3+n+1}{3n^3+5n^2+2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\binom{5}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
5. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(3-n)^4}{3n^3-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
6. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2n^2+3}{n^4+1} + \frac{1}{23^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
7. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2+(-1)^n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
8. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(-\frac{1}{42}\right)^{2n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Hinweis: Die Klammer in der Definition der Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ steht für den Binomialkoeffizienten.

Lösung:

1. Der erste Summand $\left(\frac{1}{1000}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konstant und konvergiert daher gegen $\frac{1}{1000}$. Der zweite Summand $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0. (z.B. Beispiel III.2.5). Nach einem Grenzwertsatz (Satz III.2.13 (Teil (1)) ist die Summe zweier konvergenter Folgen wieder konvergent und der Grenzwert ist gerade die Summe der Grenzwerte, es gilt also: $a_n = \frac{1}{1000} + \frac{1}{n} \to \frac{1}{1000} + 0 = \frac{1}{1000}$.
2. Dies ist eine geometrische Folge mit $z = -1$ und deshalb divergent. (Siehe auch Bemerkung III.2.8)
3. Dies ist eine rationale Zahlenfolge. Wir verwenden deshalb die Idee aus Beispiel III.2.14 und teilen durch die höchste vorkommende Potenz von n im Nenner, also durch n^3 : Wir erhalten also:

$$c_n = \frac{\frac{1}{n^3}(4n^3+n+1)}{\frac{1}{n^3}(3n^3+5n^2+2n+1)} = \frac{4+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{3+5\frac{1}{n^2}+2\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$$

Wir wissen, dass alle Folgen der Form $\frac{1}{n^k}$ gegen 0 konvergieren, deshalb erhalten wir durch wiederholtes Anwenden der Grenzwertsätze, dass der Zäehler gegen $4+0+0 = 4$ konvergiert und der Nenner gegen $3 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 = 3$. Da der Nenner nun gegen eine von Null verschiedene Zahl konvergiert, dürfen wir nun Teil (4) von Satz III.2.13 anwenden und erhalten den Grenzwert $\frac{4}{3}$.

Alternativ kann man auch einfach Teil (b) von Beispiel III.2.14 verwenden, wo genau diese Argumentation schon allgemein durchgeführt wurde und einfach feststellen, dass wir uns im dort **1.Fall** genannten Fall befinden und gleich sehen, dass wir einfach nur 3 durch 4 teilen müssen, um den Grenzwert zu erhalten.

4. Nach der Definition der Binomialkoeffizienten (Definition I.4.6) gilt für alle $n > 5$:

$$\binom{5}{n} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \cdots \cdot (5 - n + 1)}{n!} = 0.$$

Das heißt, dass die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach endlich vielen Schritten (also für alle $n \geq 6$) gleich der Nullfunktion ist. Somit konvergiert $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

5. Dies ist wieder eine rationale Folge. Wir verwenden also wieder Teil (b) von Beispiel III.2.14. Diesmal ist der Grad des Zählerpolynoms größer als der des Nennerpolynoms ($4 > 3$) und deshalb befinden wir uns im **3.Fall** und die Folge ist divergent.

6. Dies ist eine Summe von zwei Polynomen. Wenn wir zeigen können, dass beide konvergieren, so können wir nach den Grenzwertsätzen die beiden Grenzwerte addieren.

Der erste Summand ist eine rationale Folge und nach Beispiel III.2.14 konvergiert er gegen 0. Der zweite Summand $\frac{1}{23^n} = \left(\frac{1}{23}\right)^n$ ist eine geometrische Folge und nach Satz III.2.7 konvergiert diese in diesem Falle gegen 0, da $\left|\frac{1}{23}\right| = \frac{1}{23} < 1$ ist.

Da beide Summanden konvergireren, darf man die Grenzwerte einfach addieren und somit konvrgiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $0 + 0 = 0$.

7. Hier gibt es wie immer mehrere Möglichkeiten, zu argumentieren. Zum Beispiel kann man sagen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $1 \leq 2 + (-1)^n \leq 3$ gilt. Wenn wir diese Ungleichungen durch n^2 dividieren, ergibt dies:

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{2 + (-1)^n}{n^2} \leq \frac{3}{n^2}$$

Die Folge auf der rechten Seite $\left(\frac{3}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bekannterweise gegen 0, d.h. der Abstand zwischen $\frac{3}{n^2}$ und 0 wird beliebig klein für n groß genug. Da sich unsere Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{2+(-1)^n}{n^2}$ immer zwischen 0 und $\left(\frac{3}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ befindet, ist Abstand von f_n zu 0 immer kleiner oder gleich dem Abstand von $\frac{3}{n^2}$ zu 0. Er wird also auch beliebig klein. Somit konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen 0.

8. Die Folge $\left(\left(-\frac{1}{42}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine geometrische Folge und konvergiert gegen 0, weil $\left|-\frac{1}{42}\right| < 1$ ist. Die gesuchte Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lässt sich schreiben als

$$\left(-\frac{1}{42}\right)^n \cdot n \cdot \left(-\frac{1}{42}\right)^3.$$

Die ersten beiden Faktoren konvergieren gegen 0, der letzte Faktor ist konvergent, weil er konstant ist. Nach Teil (2) der Grenzwertsätze ist die Gesamtfolge also konvergent und der Grenzwert ist das Produkt, also $0 \cdot 0 \cdot \left(-\frac{1}{42}\right)^3 = 0$.

Aufgabe G18 (eine äquivalente Formulierung für Konvergenz)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeige folgende Äquivalenz:

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = p\right) \iff \left((\forall m \in \mathbb{N})(\exists N_m \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_m) d(a_n, p) < \frac{1}{m}\right)$$

Lösung:

„$\Longrightarrow$": Wir nehmen an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen p konvergiert. Dann gilt also

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists N_\epsilon \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_\epsilon)d(a_n, p) < \epsilon.$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann ist natürlich $\frac{1}{m} > 0$. Wir können also obige Aussage für den Fall $\epsilon = \frac{1}{m}$ verwenden und erhalten:

$$(\exists N_m \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_m)d(a_n, p) < \frac{1}{m}.$$

Da dies aber für alle $m \in \mathbb{N}$ funktioniert, ist damit die Aussage bewiesen.

„$\Longleftarrow$": Nehmen wir nun umgekehrt an, die rechte Aussage wäre wahr:

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists N_m \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_m)d(a_n, p) < \frac{1}{m}. \tag{1}$$

Da wir nun die gewöhnliche Formulierung beweisen wollen und diese mit einem „$(\forall\epsilon > 0)$"-Quantor beginnt, nehmen wir uns ein beliebiges $\epsilon > 0$. Nun müssen wir noch ein $m \in \mathbb{N}$ konstruieren, sodass wir obige Aussage auch verwenden können. Dies machen wir mit Hilfe des Satzes des Archimedes (Satz II.2.10): Nach diesem Satz gibt es eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$, sodass $m > \frac{1}{\epsilon}$. Letztere Ungleichung kann man auch umformulieren zu $\frac{1}{m} < \epsilon$. Aussage , angewandt auf genau dieses m, liefert uns nun

$$(\exists N_m \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_m)d(a_n, p) < \frac{1}{m}$$

Da dieses $\frac{1}{m}$ aber per Konstruktion kleiner als ϵ ist, haben wir es damit bewiesen.

Aufgabe G19 (ein Kriterium für Suprema)
Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen und sei $s \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke für A. Zeige, dass s genau dann das Supremum von A ist, wenn es eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die nur aus Elementen aus A besteht und gegen s konvergiert.

Lösung:

„$\Longrightarrow$": Angenommen, $s = \sup A$. Dann gilt nach der Charakterisierung von Suprema (Lemma II.2.14), dass $M \leq s$ und dass $(\forall\epsilon > 0)(\exists a \in A)m > s - \epsilon$. Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, gilt dies insbesondere auch alle ϵ der Form $\frac{1}{n}$. Dies bedeutet: Es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $a_n \in A$, sodass $a_n > s - \frac{1}{n}$. Wir wählen nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein solches Element aus und erhalten so eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nun bleibt noch zu zeigen, dass $a_n \to s$.
Für die Konvergenz zu zeigen, müssen wir folgende Formel beweisen:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)|a_n - s| < \epsilon$$

Sei nun *epsilon* > 0 gegeben. Dann existiert nach dem Satz von Archimedes ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\epsilon}$. Es gilt also $\frac{1}{N} < \epsilon$.
Es bleibt zu zeigen, dass $(\forall n \geq N)|a_n - s| < \epsilon$. Sei also $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige Zahl $\geq N$. Da $n \geq N$ ist und $N > \frac{1}{\epsilon}$ gilt auch: $n > \frac{1}{\epsilon}$, was sich umschreiben lässt zu $\frac{1}{n} < \epsilon$. Da a_n ein Element in A ist und $A \leq s$ ist, gilt, dass $a_n < s$ ist und deshalb $|a_n - s| = s - a_n$. Also haben wir folgende Abschätzung:

$$|a_n - s| = s - a_n < s - \left(s - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon.$$

„$\Longleftarrow$": Wir nehmen nun an, $A \leq s$ und es existiere eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Elementen in A, die gegen s konvergiert. Wir wollen nun zeigen, dass $s = \sup A$. Nach Lemma II.2.14 ist dies äquivalent dazu, zu zeigen, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $a \in A$ existiert, dass größer als $s - \epsilon$ ist. Sei also $\epsilon > 0$ beliebig gewählt. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen s konvergiert, gilt nach Definition der Konvergenz, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq N$ gilt, dass $|a_n - s| < \epsilon$ ist. Sei nun z.B. $n = N + 1$. Dann gilt $|a_n - s| < \epsilon$. Da aber $a_n \leq s$ gilt, ist dies gleichbedeutend mit $s - a_n < \epsilon$, was äquivalent ist zu $a_n > s - \epsilon$. Und da a_n ein Element in A ist, haben wir damit die Behauptung bewiesen.

Hausübung

Aufgabe H21 (eine *nicht* äquivalente Formulierung für Konvergenz in $\mathbb{R}$)

Herr X. erklärt auf seiner privaten Website mathematisch interessierten Besuchern den Begriff „Grenzwert" folgendermaßen:

> *„Wenn eine Folge einer Zahl in jedem Schritt näher kommt ohne diese Zahl jemals zu erreichen, so nennt man diese Zahl den Grenzwert der Folge."*

Warum diese „Definition" von Herrn X *nicht* äquivalent zu unserer Definition eines Grenzwertes aus der Vorlesung? Gib ein Beispiel einer Folge an, die nach der Definition von Herrn X gegen die Zahl 0 als Grenzwert haben würde, aber nicht nach unserer Definition, sowie ein Beispiel für den umgekehrten Fall. Hinweis: Beispiele für Folgen sind in der Aufgabe (G17).

Lösung: Herr X, der nebenbei bemerkt natürlich frei erfunden war, nennt zwei Kriterien, nämlich muss die Folge dem vermeintlichen Grenzwert in jedem Schritt näher kommen und zusätzlich verlangt er, dass die Folge diesen Grenzwert niemals erreicht.
Als erstes Beispiel wählen wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Aufgabe (G17). Diese Folge kommt der Zahl 0 in jedem Schritt näher, da sie positiv und streng monoton fallend ist. Dennoch erreicht sie die 0 nie, da sie ja sogar die Zahl $\frac{1}{1000}$ nie erreicht. Nach der „Definition" unseres Herrn X wäre 0 somit ein Grenzwert der Folge. Nach unserer Definition ist aber 0 natürlich kein Grenzwert, denn der Grenzwert ist ja $\frac{1}{1000}$ und eindeutig bestimmt.
Nun brauchen wir noch eine Folge, die nach unserer Definition gegen 0 konvergiert, aber nicht die beiden Eigenschaften besitzt, der 0 in jedem Schritt näher zu kommen und sie nie zu erreichen. Interessanterweise sind beide Dinge, die Herr X fordert, nicht notwendig zur Konvergenz. Zum Beispiel ist die konstante Nullfolge $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen 0 konvergiert, aber offensichtlich ist es nicht korrekt, dass sie die 0 nie erreicht, denn sie ist ja gleich der Null. Ein sehr ähnliches Beispiel ist die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\binom{5}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Aufgabe (G17). Ein Beispiel, das demonstriert, dass es durchaus vorkommen kann, dass sich konvergente Folgen unendlich oft echt von ihrem Grenzwert wegbewegen, zeigt die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Aufgabe (G17), da die Terme immer abwechselnd von der Null weg und zur Null hingehen.
Abschließend kann man sagen, dass das Problem an der Xschen Definition ist, dass es überhaupt nicht darauf ankommt, ob der Grenzwert irgendwann erreicht wird oder ob sich die Folge monoton darauf zubewegt, sondern dass es entscheidend ist, ob die Folge dem Grenzwert beliebig nahe kommt. Eine Zahl ist also Grenzwert der Folge, falls die Folge jede noch so kleine Umgebung der Zahl ab irgendeinem Index erreicht und danach nie wieder diese Umgebung verlässt. Und das leistet gerade unsere ϵ-Definition.

Aufgabe H22 (Anwendung der Grenzwertsätze)

Gegeben seien komplexe Zahlenfolgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $\mu \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl.

(a) Wenn die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch $(c_n + \mu)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Wenn die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert und $\mu \neq 0$, dann divergiert auch $\mu \cdot c_n$.

(c) Wenn die Folge $(c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, dann ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent oder $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(d) Wenn die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, dann divergiert auch die Summe $(c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(e) Wenn die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert $(c_{n+1} - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

(f) Wenn die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine von Null verschiedene Zahl konvergiert, dann divergiert die Produktfolge $(c_n d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(g) Wenn die Folge $(n \cdot c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hinweis: Um zu zeigen, dass eine Folge divergiert, bietet sich ein Widerspruchsbeweis an, d.h. man nimmt an, sie konvergiert und führt dies zum Widerspruch.

Lösung: Wir verwenden für die Lösung der Aufgabe den Satz III.2.13 aus dem Skript (die Grenzwertsätze).

(a) Dies folgt aus Teil (1) des Satzes für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} := \mu$, da die konstante Folge $(\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ ja konvergent ist.

(b) Angenommen, $\mu \cdot c_n$ würde konvergieren. Nach Teil (3) des Satzes darf man konvergente Folgen mit Konstanten multiplizieren und sie bleiben konvergent. Als Konstante wählen wir die Zahl $\frac{1}{\mu}$. (Man beachte, dass wir hier $\mu \neq 0$ verwenden.) Wenn wir also die konvergente Folge $(\mu \cdot c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\frac{1}{\mu}$ erhalten wir also nach dem Satz eine konvergente Folge, diese ist aber gerade $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und von dieser setzen wir voraus, dass sie *nicht* konvergiert. Widerspruch. also muss $\mu \cdot c_n$ divergieren.

(c) Teil (1) des Satzes sagt ja: Wenn zwei Folgen konvergieren, dann konvergiert auch die Summe. In Formeln:

$$\Big((c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konv.}\Big) \wedge \Big((d_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konv.}\Big) \Longrightarrow \Big((c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konv.}\Big)$$

Dies ist äquivalent zu der Kontraposition (wir erinnern uns an Bemerkung I.1.3):

$$\neg\Big((c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konv.}\Big) \Longrightarrow \neg\bigg(\big((c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konv.}\big) \wedge \big((d_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konv.}\big)\bigg)$$

Auf der rechten Seite wenden wir dann die de Morganschen Regeln an und erhalten:

$$\Big((c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverg.}\Big) \Longrightarrow \Big((c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverg.}\Big) \vee \Big((d_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverg.}\Big)$$

Und das war zu zeigen.

(d) Annahme, die Summe würde konvergieren. Wir wissen, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergiert. Nach Teil (3) ist auch $(-c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und wir können nach Teil (1) beide konvergenten Folgen addieren und erhalten wieder eine konvergente. Diese ist aber gerade $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und diese ist nach Voraussetzung divergent. Widerspruch.

(e) Sei $c := \lim_{n\to\infty}$ der Grenzwert von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aus der Definition des Grenzwertes folgt sofort, dass $(c_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ den gleichen Grenzwert hat, da alle Folgenglieder gleich sind, nur eins verschoben. Nach Teil (3) unseres Satzes ist die Differenz wieder konvergent und der Grenzwert der Differenz $(c_{n+1} - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleich der Differenz der Grenzwerte, also gleich $c - c = 0$.

(f) Wir nehmen per Widerspruch an, die Produktfolge würde konvergieren. Nach Teil (4) des Satzes ist der Quotient von zwei konvergenten Folgen wieder konvergent, falls der Grenzwert des Nenners nicht Null ist. Somit wäre der Quotient von $\left(\frac{c_n d_n}{d_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, aber dies ist genau $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welches nach Voraussetzung divergiert.

(g) Wir wissen, dass $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Nach Teil (2) ist das Produkt von zwei konvergenten Folgen konvergent, also ist $\left(\frac{1}{n}\cdot nc_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Der Grenzwert von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist übrigens (ebenfalls nach Teil (2) des Satzes) das Produkt der Grenzwerte, also

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}c_n = 0\cdot\lim_{n\to\infty}c_n = 0.$$

Aufgabe H23 (Konvergenzkriterium für komplexe Zahlenfolgen)

(a) Sei $z = x+iy$ eine komplexe Zahl mit Realteil x und Imaginärteil y. Zeige die Ungleichungen: $|x| \leq |z|$ und $|y| \leq |z|$.

(b) Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + iy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Zeige, dass die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen z konvergiert, wenn

$$x_n \longrightarrow x \text{ und } y_n \longrightarrow y.$$

Lösung:

(a) Per Definition des Betrages in $\mathbb{C}$ gilt $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$. Wenn wir beide Seiten der Gleichung quadrieren, erhalten wir:

$$|z|^2 = x^2 + y^2.$$

Da x und y aber reelle Zahlen sind, gilt $x^2 \geq 0$ und $y^2 \geq 0$, also können wir die folgenden Abschätzung machen:

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \geq x^2$$

Wurzeln auf beiden Seiten ergibt:

$$|z| \geq |x|$$

Analog gilt auch:

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \geq y^2$$

und demnach

$$|z| \geq |x|.$$

(b)

„$\Longrightarrow$": Angenommen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{C}$ gegen z. Wir wollen nun zuerst zeigen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, d.h. dass $|x_n - x|$ beliebig klein wird. Nun ist aber $x_n - x$ gerade der Realteil von $z_n - z$. Also können wir die Abschätzung aus der Aufgabe (a) verwenden:

$$|x_n - x| \leq |z_n - z|.$$

Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert, weil $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen z konvergiert, ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N_\epsilon$ die Abschätzung $|z_n - z| < \epsilon|$ gilt.
Da wir aber oben gesehen haben, dass $|x_n - x| \leq |z_n - z|$ ist, gilt somit auch $|x_n - x| < epsilon$.
Also konvergiert x_n gegen x.
Nun wollen wir noch zeigen, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y konvergiert. Hierzu können wir entweder analog zu oben vorgehen oder alternativ folgenden „Trick" verwenden:
Wir lösen die Gleichung $z_n = x_n + iy_n$ nach y_n auf und erhalten:

$$y_n = \frac{z_n - x_n}{i}$$

Nun nutzen wir aus, dass z_n gegen z konvergiert und wir bereits bewiesen haben, dass x_n gegen x konvergiert. Deshalb dürfen wir unsere Grenzwertsätze anwenden, die uns sagen, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergiert, und zwar gegen $\frac{z-x}{i} = y$.

„$\Longleftarrow$": Angenommen $x_n = \mathrm{Re}(z_n) \longrightarrow x$ und $y_n \longrightarrow y$. Dann gilt nach den Grenzwertsätzen (Teil (3) von Satz III.2.13), dass $z_n = x_n + iy_n$ gegen $x + iy$ konvergiert.

Aufgabe H24 (die rationalen Zahlen liegen dicht)

Zeige, dass es jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die nur aus Elementen aus $\mathbb{Q}$ besteht und gegen a konvergiert. (Hinweis: dies ist eine Folgerung einer Folgerung des Satzes von Archimedes)

Lösung: Die Folgerung des Satzes von Archimedes besagte, dass jedes offene Intervall $]a, b[$ mit $a < b$ in einem vollständig angeordneten Körper, also insbesondere jedes Intervall in $\mathbb{R}$ eine rationale Zahl enthält. Dies gilt insbesondere für jedes Intervall der Form $\left]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right[$. Wir wählen nun für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein $q_n \in \mathbb{Q}$ aus, sodass $q_n \in \left]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right[$ liegt. Damit haben wir eine Folge rationaler Zahlen konstruiert mit folgender Eigenschaft:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) a - \frac{1}{n} < q_n < a + \frac{1}{n}$$

Das lässt sich auch umformen zu

$$(\forall n \in \mathbb{N})\, |a - q_n| < \frac{1}{n}$$

Nun wollen wir ja eigentlich zeigen, dass $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Sei also $\epsilon > 0$, dann gibt es bekanntlich ein $N > \frac{1}{\epsilon}$. Sei $n \geq N$. Dann ist $|a - q_n| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$.