Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007
Übung 5, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 14 (Ungleichungen).

Es sei (K, K_+) ein angeordneter Körper.

(a) Zeige, dass für $2 := 1 + 1$ die Beziehung $1 > \frac{1}{2} > 0$ gilt.

(b) Zeige die sogenannte "Ungleichung vom arithmetischen Mittel":

$$(\forall x, y \in K) \quad x < y \quad \Rightarrow \quad x < \frac{x+y}{2} < y\,.$$

(a) Nach Satz II.2.4 (ii) ist $1 > 0$. *Aufgrund der Verträglichkeit von Anordnung und Addition (Satz II.2.3) folgt* $2 = 1 + 1 > 0 + 1 = 1$. *Daher ist* $2 > 0$ *und somit auch* $\frac{1}{2} > 0$, *nach Satz II.2.4 (iii). Da* $1 \cdot 2 = 2 > 0$, *folgt aus* $2 > 1$ *mit Satz II.2.4 (iv), dass* $\frac{1}{2} < 1/1 = 1$.

(b) Aus $x < y$ *folgt* $2x = x + x < x + y$ *mit Satz II.2.3. Multiplizieren wir diese Ungleichung mit* $\frac{1}{2}$, *so folgt mit Satz II.2.4 (i) wie gewünscht*

$$x = \frac{1}{2}(2x) < \frac{1}{2}(x+y)\,.$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $\frac{1}{2} > 0$ *nach (a). Analog ist* $x + y < y + y = 2y$ *und somit* $\frac{x+y}{2} < y$.

G 15 (Suprema und Maxima).

Es sei (K, K_+) ein angeordneter Körper. Eine Funktion $f\colon K \to K$ heißt *monoton wachsend*, wenn

$$(\forall a, b \in K) \quad a \leq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \leq f(b)\,.$$

(a) Zeige: Ist K vollständig angeordnet und $f\colon K \to K$ monoton wachsend, so gilt für jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge $A \subseteq K$ mit $\sup(A) < \infty$, dass $f(A)$ nach oben beschränkt ist und

$$\sup f(A) \;\leq\; f(\sup A)\,. \tag{1}$$

(b) Zeige, dass in (1) Gleichheit gilt, wenn A ein Maximum $\max(A)$ besitzt.

(c) Finde eine monoton wachsende Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ derart, dass $\sup f(A) < f(\sup A)$ für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{Q}$, beispielsweise für $A := \,]-\infty, 0[\,$.

Für jedes $a \in A$ gilt

$$a \;\le\; \sup\, A \tag{2}$$

(weil $\sup A$ *eine obere Schranke für* A *ist). Da* f *monoton wächst, folgt* $f(a) \le f(\sup A)$. *Also ist* $f(\sup A)$ *eine obere Schranke für* $f(A)$ *und somit* $\sup f(A) \le f(\sup A)$ *(weil das Supremum* $\sup f(A)$ *die kleinste obere Schranke von* $f(A)$ *ist und somit kleiner gleich der gefundenen oberen Schranke* $f(\sup A)$*).*

(b) Hat A *ein Maximum* $\max(A)$, *so ist* $f(\max(A)) \le \sup f(A)$ *(da* $\sup f(A)$ *eine obere Schranke für* $f(A)$ *ist, und* $f(\max(A)) \in f(A)$ *gilt). Andererseits wissen wir schon aus (a), dass* $\sup f(A) \le f(\sup A) = f(\max A)$. *Es folgt* $f(\max A) = \sup f(A)$ *(und somit auch* $f(\max A) = \max f(A)$*).*

(c) Wir definieren $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *als* $f(x) := 0$ *falls* $x < 0$, $f(x) := 1$ *falls* $x \ge 0$. *Dann ist* f *eine monoton wachsende Abbildung. Für die Menge* $A := \,]-\infty, 0[$ *ist* $\sup A = 0$ *und somit* $f(\sup A) = f(0) = 1$. *Jedoch gilt* $f(x) = 0$ *für alle* $x \in A$ *und somit* $\sup f(A) = 0$. *Also ist* $\sup f(A) = 0 < 1 = f(\sup(A))$.

G 16 (Beispiele von Metriken).

(a) Es sei X eine Menge. Zeigen, dass die Abbildung

$$d\colon X \times X \to [0,\infty[\,, \quad d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y; \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf X ist.

(b) (Manhattan-Metrik). Zeige, dass

$$d_1\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0,\infty[\,, \qquad d_1((x,y),(x',y')) := |x - x'| + |y - y'|$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist. Was bedeutet der so definierte Abstand geometrisch? (Skizze!)

(a) Für $x, y \in X$ *gilt:*

$$0 \neq d(x,y) \Leftrightarrow x \neq y$$

per Definition von d. *Da* $x = y$ *genau dann, wenn* $y = x$, *ist also* $d(x,y) = d(y,x)$, *somit* d *symmetrisch. Zum Beweis der Dreiecksungleichung seien* $x, y, z \in X$. *Ist* $x = z$, *so ist*

$$d(x,z) = 0 \le d(x,y) + d(y,z)\,.$$

Ist $x \neq z$, *so ist* $d(x,z) = 1$. *Weiter ist dann* $x \neq y$ *oder* $y \neq z$. *Im ersten Fall ist* $d(x,y) = 1$, *im zweiten ist* $d(y,z) = 1$. *In beiden Fällen ist*

$$d(x,z) = 1 \le d(x,y) + d(y,z)\,.$$

(b) Ist $0 = d_1((x,y),(x',y')) = |x - x'| + |y - y'|$, *so folgt* $x - x' = 0$ *und* $y - y' = 0$, *also* $(x,y) = (x',y')$. *Symmetrie:*

$$d_1((x',y'),(x,y)) = |x' - x| + |y' - y| = |x - x'| + |y - y'| = d_1((x,y),(x',y')).$$

Dreicksungleichung: Gegeben $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$ *gilt*

$$\begin{aligned} d_1((x,y),(x'',y'')) &= |x - x''| + |y - y''| \; = \; |x - x' + x' - x''| + |y - y' + y' - y''| \\ &\leq |x - x'| + |x' - x''| + |y - y'| + |y' - y''| \\ &= d_1((x,y),(x',y')) + d_1((x',y'),(x'',y'')) \, . \end{aligned}$$

Die Zahl $d_1((x, y), (x', y'))$ *ist die Länge des Weges, der zunächst parallel zur* x*-Achse von* (x, y) *nach* (x', y)*, dann parallel zur* y*-Achse von* (x', y) *nach* (x', y') *führt.*

Hausübung

H 17 ($\mathbb{Q}$ ist nicht ordnungsvollständig).

Betrachte die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x,\, x^2 \leq 2\}$$

und zeige, dass M beschränkt ist, aber kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzt.

Es gilt $M \leq 2$. Angenommen $s := \sup M$ existiert in $\mathbb{Q}$, dann gilt einerseits $M \leq s$ und andererseits $s < \sqrt{2}$. Nach Folgerung II.2.20. aus dem Skript gibt es eine rationale Zahl r mit $s < r < \sqrt{2}$ und somit gilt $r^2 < 2$, also $r \in M$ im Widerspruch zur Definition von s. Folglich ist Q nicht ordnungsvollständig.

H 18 (Die Parallelogrammidentität).

Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeige:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Deute diese Gleichung geometrisch.

Es gilt

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\bar{w}) + |z|^2 + |w|^2 - 2Re(z\bar{w}) = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Betrachtet man ein Parallelogramm mit Seiten a und b der Länge $|z|$ beziehungsweise $|w|$, so besagt die obige Gleichung gerade, dass die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich zwei mal die Summe der Quadrate ber den Seiten des Parallelogramm ist.

H 19 (Die französische Eisenbahnmetrik).

Sei X eine Menge und $f : X \to]0, \infty[$ eine Funktion. Zeige: Durch

$$d(x, y) := \begin{cases} f(x) + f(y) & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

wird eine Metrik auf X definiert.

Zeige dann: Nimmt man zusätzlich noch einen Punkt P hinzu und setzt $d(P, P) = 0$ sowie $d(x, P) = d(P, x) = f(x)$ für alle $x \in X$, so erhält man eine Metrik auf $X' := X \cup P$.

Die Metrik auf $X \cup P$ wird französische Eisenbahnmetrik genannt. Hierbei spielt P die Rolle von Paris und $f(x)$ ist die Entfernung von Paris. Um von x nach y zu kommen, muss man den Umweg um P nehmen, so dass sich als Entfernung $f(x) + f(y)$ ergibt.

Für $x, y \in X$ gilt:

$$0 \neq d(x,y) \Leftrightarrow x \neq y$$

per Definition von d (Beachte $f(X) \subseteq]0,\infty[$). Da $x = y$ genau dann, wenn $y = x$, ist also $d(x,y) = d(y,x)$, somit d symmetrisch. Zum Beweis der Dreiecksungleichung seien $x, y, z \in X$. Ist $x = z$, so gilt

$$d(x,z) = 0 \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Ist $x \neq z$, so gilt $d(x,z) > 0$. Weiter ist dann $x \neq y$ oder $y \neq z$. Im ersten Fall ist $d(x,y) => 0$, im zweiten ist $d(y,z) > 0$. In beiden Fällen ist

$$d(x,z) = f(x) + f(z) < f(x) + f(y) + f(y) + f(z) = d(x,y) + d(y,z).$$

Auf X' definiere man die Funktion $f' : X' \to [0,\infty[$ durch

$$f'(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq P \\ 0 & \text{für } x = P. \end{cases}$$

Dann rechnet man wie oben nach, dass durch

$$d'(x,y) := \begin{cases} f'(x) + f'(y) & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

eine Metrik auf X' definiert wird.

H 20 (Abgeschlossene Mengen).

(a) Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum (X,d) jede der Mengen

$$\overline{B}_r(p) := \{x \in X : d(x,p) \leq r\}, p \in X, r \in \mathbb{R},$$

abgeschlossen ist.

(b) Wir betrachten nun den die Menge $\mathbb{R}$ ausgestattet mit der gewöhnlichen Metrik $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(x,y) := |x - y|$. Dann bildet das Paar $(\mathbb{R}, d)$ einen metrischen Raum. Zeige:

(1) Die einpunktigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen.

(2) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen.

(a) Um einzusehen, dass jede der Mengen

$$\overline{B}_r(p), p \in X, r \in \mathbb{R},$$

abgeschlossen ist, müssen wir zeigen, dass das Komlement $X \backslash \overline{B}_r(p)$ offen ist: Sei dazu $q \in X \backslash \overline{B}_r(p)$ und $s := d(q,p) - r$. Dann gilt $s > 0$ (da $q \notin \overline{B}_r(p)$) und $U_{\frac{s}{2}}(q) \subseteq X \backslash \overline{B}_r(p)$: Für $x \in U_{\frac{s}{2}}(q)$ folgt aus der Dreiecksungleichung $d(q,p) \leq d(q,x) + d(x,p) < \frac{s}{2} + d(x,p)$ nämlich $d(x,p) > d(q,p) - \frac{s}{2} = s + r - \frac{s}{2} = r + \frac{s}{2} > r$. Somit haben wir die Offenheit von $X \backslash \overline{B}_r(p)$ nachgewiesen.

(b) *(1)* *Verwende Teilaufgabe (a) mit $r = 0$.*

(2) *Angenommen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen. Nach Definition ist dann $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ offen und zu jedem $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ existiert ein $r > 0$ mit $U_r(x) =]x - r, x + r[\subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Nach Folgerung II.2.20 existert aber ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < x + r$, also $q \in U_r(x)$ und wir erhalten einen Widerspruch.*

Angenommen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist offen. Nach Definition gibt es dann ein $r > 0$ mit $] - r, r[\subseteq \mathbb{Q}$. Dann gilt aber auch $] - 2r, 2r[\subseteq \mathbb{Q}$ und mit vollständiger Induktion folgt $] - nr, nr[\subseteq \mathbb{Q}$ (das Produkt einer rationaler Zahlen mit einer natürlichen Zahlen ist wieder rational!). Nach dem Satz von Archimedes existiert nun ein $m \in \mathbb{N}$ mit $mr > \sqrt{2}$, was $\sqrt{2} \in$]-mr,mr[$\subseteq \mathbb{Q}$ zur Folge hätte. Daher kann $\mathbb{Q}$ nicht offen sein.