Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Sommersemester 2007
9.5.2007

4. Übungsblatt zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Aufgaben und Lösungen

Gruppenübung

Aufgabe G11 (binäre Operatoren)

Das Folgende sind alles *keine* abelschen Gruppen. Gib bei jedem Beispiel an, welche der Axiome (A), (N), (I), (K) erfüllt sind:

- $(\mathbb{N}, +)$ mit $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (x, y) \mapsto x + y$
- $(\mathbb{N}, \cdot)$ mit $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (x, y) \mapsto x \cdot y$
- $(\mathbb{N}, \curlyvee)$ mit $\curlyvee : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (x, y) \mapsto x \curlyvee y := \max\{x, y\}$
- $(\mathbb{N}_0, \ominus)$ mit $\ominus : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : (x, y) \mapsto x \ominus y := |x - y| = \max\{x - y, y - x\}$
- $(\mathbb{N}, \curlywedge)$ mit $\curlywedge : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : (x, y) \mapsto x \curlywedge y := \min\{x, y\}$
- $(\mathbb{N}, \blacktriangleleft)$ mit $\blacktriangleleft : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (x, y) \mapsto x \blacktriangleleft y := x$

Lösung:

$(\mathbb{N}, +)$:

(A) ist erfüllt, da Addition in den natürlichen Zahlen assoziativ ist.

(N) ist *nicht* erfüllt: Angenommen, es gebe eine natürliche Zahl e mit $(\forall x \in \mathbb{N}) x + e = x$. Dann wäre insbesondere $1+e = 1$, daraus folgt, dass $e = 0$. Dies ist aber ein Widerspruch, da nach unserer Definition $\mathbb{N}$ die Zahl 0 nicht enthält.

(I) ergibt keinen Sinn, wenn (N) nicht erfüllt ist.

(K) ist erfüllt, da die Addition in den natürlichen Zahlen kommutativ ist.

$(\mathbb{N}, \cdot)$:

(A) ist erfüllt, da Multiplikation in den natürlichen Zahlen assoziativ ist.

(N) ist erfüllt, da die Zahl 1 die Bedingung$(\forall x \in \mathbb{N}) x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ erfüllt.

(I) ist *nicht* erfüllt, da z.B. die Zahl 2 kein multiplikatives Inverses besitzt, d.h. es gibt kein $y \in \mathbb{N}$ sodass $2 \cdot y = 1$ gilt.

(K) ist erfüllt, da die Multiplikation in den natürlichen Zahlen kommutativ ist.

$(\mathbb{N}, \curlyvee)$:

(A) ist erfüllt:

$$\begin{aligned}(x \curlyvee y) \curlyvee z &= \max\Big\{(x \curlyvee y), z\Big\} \\ &= \max\Big\{\max\{x, y\}, z\Big\} \\ &= \max\Big\{x, y, z\} \\ &= \max\Big\{x, \max\{y, z\}\Big\} \\ &= \max\Big\{x, (y \curlyvee z)\Big\} \\ &= x \curlyvee (y \curlyvee z).\end{aligned}$$

(N) ist erfüllt, da die Zahl 1 die Bedingung$(\forall x \in \mathbb{N}) x \curlyvee 1 = \max\{x, 1\} = x$ erfüllt.

(I) ist *nicht* erfüllt, da z.B. die Zahl 2 kein Inverses besitzt, d.h. es gibt kein $y \in \mathbb{N}$ sodass $2 \curlyvee y = \max\{2, y\} = 1$ gilt.

(K) ist erfüllt, da $x \curlyvee y = \max\{x, y\} = \max\{y, x\} = y \curlyvee x$ gilt.

$(\mathbb{N}_0, \ominus)$:

(A) ist *nicht* erfüllt, da z.B. für $x = 1, y = 2, z = 3$ die Gleichheit $(1 \ominus 2) \ominus 3 = (1 \ominus 2) \ominus 3$ nicht gilt:

$$\begin{aligned}(1 \ominus 2) \ominus 3 &= \Big||1-2|-3\Big| = \Big|1-3\Big| = 2 \\ 1 \ominus (2 \ominus 3) &= \Big|1-|2-3|\Big| = \Big|1-1\Big| = 0.\end{aligned}$$

(N) ist erfüllt, da die Zahl $0 \in \mathbb{N}_0$ die Rolle des Neutralelementes annimmt:

$$\begin{aligned}x \ominus 0 &= |x-0| = |x| = x \\ 0 \ominus x &= |0-x| = |-x| = x\end{aligned}$$

(I) ist erfüllt, da jede Zahl in $\mathbb{N}_0$ ihr eigenes Inverses ist:

$$x \ominus x = |x-x| = |0| = 0$$

(K) ist erfüllt, da $x \ominus y = |x-y| = |y-x| = y \ominus x$.

$(\mathbb{N}_0, \curlywedge)$:

(A) ist erfüllt:

$$\begin{aligned}(x \curlywedge y) \curlywedge z &= \min\Big\{(x \curlywedge y), z\Big\} \\ &= \min\Big\{\min\{x, y\}, z\Big\} \\ &= \min\Big\{x, y, z\} \\ &= \min\Big\{x, \min\{y, z\}\Big\} \\ &= \min\Big\{x, (y \curlywedge z)\Big\} \\ &= x \curlywedge (y \curlywedge z).\end{aligned}$$

(N) ist nicht erfüllt, da ein Neutralelement für $\curlywedge$ größer als oder gleich allen natürlichen Zahlen sein müsste, die natürlichen Zahlen aber noch oben unbeschränkt sind.

(I) ergibt keinen Sinn, wenn (N) nicht erfüllt ist.

(K) ist erfüllt, da $x \curlywedge y = \min\{x, y\} = \min\{y, x\} = y \curlywedge x$ gilt.

$(\mathbb{N}, \blacktriangleleft)$:

(A) ist erfüllt:

$$\begin{aligned}(x \blacktriangleleft y) \blacktriangleleft z &= x \blacktriangleleft z \\ &= x \\ &= x \blacktriangleleft (y \blacktriangleleft z).\end{aligned}$$

(N) ist nicht erfüllt. Beweis per Widerspruch: Nehmen wir an, es gäbe ein Neutralelement $e \in \mathbb{N}$, dann würde dies ja erfüllen:

$$(\forall x \in \mathbb{N}) x \blacktriangleleft e = e \blacktriangleleft x = x.$$

Nach Definition von „$\blacktriangleleft$" ist dies gleichbedeutend mit

$$(\forall x \in \mathbb{N}) x = e = x,$$

in Worten: Es gibt eine Zahl $e \in \mathbb{N}$, die gleich allen anderen Zahlen ist. Dies ist absurd.

(I) ergibt keinen Sinn, wenn (N) nicht erfüllt ist.

(K) ist auch *nicht* erfüllt, da $1 \blacktriangleleft 2 = 1 \neq 2 \blacktriangleleft 1 = 2$.

Aufgabe G12 (ein endlicher Körper (Teil 1))

Wir betrachten die zweielementige Menge $\mathbb{F}_2 := \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ mit der folgenden Addition:

$$\mathbf{0}+\mathbf{0} := \mathbf{1}+\mathbf{1} := \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{0}+\mathbf{1} := \mathbf{1}+\mathbf{0} := \mathbf{1}.$$

Die Multiplikation $\cdot$ sei folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{0}\cdot\mathbf{0} := \mathbf{0}\cdot\mathbf{1} := \mathbf{1}\cdot\mathbf{0} := \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{1}\cdot\mathbf{1} := \mathbf{1}.$$

(a) Verifiziere, dass $(\mathbb{F}_2, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Welches Element ist das Neutralelement?

(b) Verifiziere, dass $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ein Körper ist. Welches Element ist das Einselement?

Lösung:

(a) Assoziativität zeigt man z.B. durch eine Fallunterscheidung in acht Fälle, d.h. man zeigt $(x+y)+z = x+(y+z)$ zuerst für $x = 0, y = 0, z = 0$ und probiert dann alle acht Fälle durch, bis man bei $x = 1, y = 1, z = 1$ angekommen ist. Vielleicht gehts auch schlauer... (Hinweis: Alle, die die Aufgabe (T2e) auf dem allerersten Tutoriumsblatt gemacht haben, haben diese acht Fälle bereits erledigt, nur unter anderem Namen.) Das Neutralelement der Addition ist $\mathbf{0}$. Dies ist klar per Konstruktion. Jedes Element ist sein eigenes additives Inverses, d.h. $\mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{1}+\mathbf{1} = \mathbf{0}$. Die Kommutativität der Addition folgt direkt aus der Definition.

(b) Auch hier verifiziert man die Eigenschaften z.B. durch Fallunterscheidungen, bzw. Wahrheitstafeln.

Aufgabe G13 (Konstruktion einer Körpererweiterung)

Sei K ein Körper und

$$L := K \times K = K^2 = \{(a, b) : a, b \in K\}.$$

Auf der Menge L definieren wir eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d), \qquad \text{und} \qquad (a,b)\cdot(c,d) := (a\cdot c - b\cdot d, b\cdot c + a\cdot d).$$

Weiter definieren wir eine Funktion:

$$N : L \to K, (a,b) \mapsto a^2+b^2.$$

(a) Zeige: $(\forall x,y \in L)\ N(x\cdot y) = N(x)\cdot N(y)$.

(b) Zeige: $(L,+)$ ist eine abelsche Gruppe.

(c) Zeige: die Multiplikation auf L ist kommutativ und besitzt ein Einselement. Welches ist es?

(d) Zeige: Für $x := (a,b)$ setze $\bar{x} := (a,-b)$. Zeige: $x\cdot\bar{x} = (N(x), 0)$.

(e) Zeige: Ein Element $x \in L$ besitzt genau dann ein multiplikatives Inverses, wenn $N(x) \neq 0$.

(f) Verwende ohne Beweis die Assoziativität der Multiplikation und das Distributivgesetz von L und folgere:

$$L \text{ ist Körper} \iff \Big(\big(\forall x \in L\big)\big(N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0\big)\Big)$$

Lösung:

(a) Sei $x = (a,b)$ und $y = (c,d)$ mit $a,b,c,d \in K$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
N(x\cdot y) &= N((a,b)\cdot(c,d))\\
&= N(ac-bd, bc+ad)\\
&= (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2\\
&= a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2bcad + a^2d^2\\
&= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2\\
&= a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)\\
&= (a^2+b^2)(c^2+d^2)\\
&= N(x)N(y).
\end{aligned}$$

(b) $(L,+)$ ist assoziativ:

$$\begin{aligned}
\big((a,b)+(c,d)\big)+(e,f) &= (a+c, b+d) + (e,f)\\
&= (a+c+e, b+d+f)\\
&= (a,b) + (c+e, d+f)\\
&= (a,b) + \big((c,d)+(e,f)\big).
\end{aligned}$$

$(L,+)$ ist kommutativ:

$$\begin{aligned}
(a,b)+(c,d) &= (a+c, b+d)\\
&= (c+a, d+b)\\
&= (c,d)+(a,b).
\end{aligned}$$

$(L,+)$ hat ein Neutralelement, nämlich das Paar $(0,0)$, da $(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b)=(0+a,0+b)=(0,0)+(a,b)$.
Jedes Element $(a,b)\in L$ besitzt ein additives Inverses, nämlich $(-a,-b)$:

$$\begin{aligned}(a,b)+(-a,-b) &= (a+(-a),b+(-b))\\ &= (0,0)\\ &= ((-a)+a,(-b)+b)=(-a,-b)+(a,b).\end{aligned}$$

Also ist $(L,+)$ eine abelsche Gruppe.

(c) $(L,\cdot)$ ist kommutativ:

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd,bc+ad)\\ &= (ca-db,cb+da)\\ &= (c,d)\cdot(a,b).\end{aligned}$$

$(L,\cdot)$ hat ein Einselement, nämlich das Paar $(1,0)$:

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot(1,0) &= (a\cdot 1-b\cdot 0,b\cdot 1+a\cdot 0)\\ &= (a,b)\\ &= (1\cdot a-0\cdot b,1\cdot b+0\cdot a)\\ &= (1,0)\cdot(a,b)\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot(a,-b) &= (a\cdot a-b\cdot(-b),b\cdot a+a\cdot(-b))\\ &= (a^2+b^2,0)\\ &= (N(a,b),0).\end{aligned}$$

(e)

„$\Longrightarrow$" Angenommen x besitzt ein multiplikatives Inverses x^{-1}. Dann gilt ja

$$x\cdot x^{-1}=(1,0),$$

da $(1,0)$ das Einselement von $(L,\cdot)$ ist. Nun wenden wir auf diese Gleichheit die Funktion N an und erhalten:

$$N(x\cdot x^{-1})=N(1,0).$$

Aus Aufgabenteil (a) wissen wir, dass $N(x\cdot x^{-1})=N(x)N(x^{-1})$ ist. Die rechte Seite der Gleichung ist einfach $1^2+0^2=1$. Also haben wir gezeigt:

$$N(x)\cdot N(x^{-1})=1.$$

Das besagt, dass das Element $N(x)\in K$ in dem Körper K ein multiplikatives Inverses hat. Folglich ist $N(x)\neq 0$.

„$\Longleftarrow$" Sei $x=(a,b)$ ein Element in L und nehmen wir nun an, dass $N(x)\neq 0$ ist. In Aufgabenteil (d) haben wir gesehen, dass $x\times\bar{x}=(N(x),0)$ ist. Setzen wir nun $y:=\frac{\bar{x}}{N(x)}=\left(\frac{a}{N(x)},\frac{-b}{N(x)}\right)$ und erhalten $(a,b)\cdot\left(\frac{a}{N(x)},\frac{-b}{N(x)}\right)=(1,0)$.

(f)

„$\Longleftarrow$" Wir nehmen die rechte Seite der Äquivalenz an und wollen zeigen, dass L mit den definierten Operationen ein Körper wird. Die additive Gruppe $(L, +)$ ist wirklich eine Gruppe, das haben wir bereits in Aufgabenteil (b) gesehen. Die Assoziativität der Multiplikation sollen wir – nach Aufgabenstellung – unbewiesen glauben, weil das Aufschreiben zu eklig wird. Die Kommutativität der Multiplikation haben wir in Aufgabenteil (c) gesehen, ebenso das Einselement.
Es bleibt zu zeigen, dass jedes Element ungleich Null ein Inverses hat. Sei $x \in L$ ein Element ungleich 0. Wir haben in Aufgabenteil (e) gesehen, dass x ein Inverses hat, wenn $N(x) \neq 0$ ist. Nehmen wir also per Widerspruch an, $N(x) = 0$. Dann würde nach Voraussetzung gelten, dass auch $x = 0$ wäre und das ist direkt ein Widerspruch zur Wahl von x. Also ist x invertierbar.

„$\Longrightarrow$" Wenn L ein Körper ist, dann ist jedes Element außer der Null invertierbar. Wir haben in Aufgabenteil (e) gesehen, dass ein Element $x \in L$ genau dann multiplikativ invertierbar ist, wenn $N(x) \neq 0$ ist. Somit muss für alle Elemente $x \in L$ gelten:

$$x \neq 0 \Rightarrow N(x) \neq 0.$$

Dies ist nach Kontraposition gleichbedeutend mit

$$N(x) = 0 \Rightarrow x = 0,$$

was zu beweisen war.

Hausübung

Aufgabe H13 (Maxima und Minima)
Entscheide, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{Q}$ ein Maximum bzw. ein Minimum haben, und gib diese an, falls sie existieren:

- (a) $M_a := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$,
- (b) $M_b := \left\{n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$,
- (c) $M_c := \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$,
- (d) $M_d := \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$,
- (e) $M_e := \emptyset$,
- (f) $M_f := \mathbb{Z}$.

Lösung:

- (a) Das Maximum ist 1, ein Minimum existiert nicht.
- (b) Das Minimum ist 0, ein Maximum existiert nicht.
- (c) Das Maximum ist $\frac{1}{2}$, das Minimum ist -1.
- (d) Weder Maximum noch Minimum existieren.
- (e) Weder Maximum noch Minimum existieren.
- (f) Weder Maximum noch Minimum existieren.

Aufgabe H14 (Permutationsgruppe)
Sei M eine beliebige Menge. In Bemerkung I.4.5 wurde eine *Permutation* auf M definiert als eine Bijektion $f : M \to M$ einer Menge auf sich selbst. Im Folgenden bezeichne
$S_M := \{f : M \to M : f \text{ bijektiv}\}$ die Menge aller Permutationen auf M.

(a) Zeige, dass die Verkettung $g \circ f$ zweier Permutationen f, g wieder eine Permutation ist.

(b) Zeige, dass die Menge aller Permutationen $(S_M, \circ)$ mit der Verknüpfung

$$\circ : S_M \times S_M \to S_M : (g, f) \mapsto g \circ f$$

als binäre Operation eine Gruppe ist.

(c) Zeige am Beispiel $M := \{1, 2, 3\}$, dass die Gruppe $(S_M, \circ)$ im Allgemeinen nicht abelsch ist.

Hinweis: Du darfst alles verwenden, was in der Vorlesung oder in bereits zurückliegenden Übungen bereits gezeigt wurde.

Lösung:

(a) Wenn $g, f \in S_M$ bijektive Funktionen von M nach M sind, dann ist auch die Verkettung $g \circ f$ eine Funktion von M nach M. Die Verkettung ist bijektiv, weil f und g bijektiv sind. (Dies wurde z.B. in Aufgabe (H7c) gezeigt). Somit ist $g \circ f$ wieder eine Permutation und damit ein Element in S_M.

(b) In Aufgabenteil (a) wurde bereits gezeigt, dass die Verknüpfung von zwei Permutationen wieder eine Permutation ist. Somit ist die Abbildung

$$\circ : S_M \times S_M \to S_M$$

wohldefiniert. Es bleibt, die Axiome einer Gruppe aus Definition II.1.1 des Skriptes nachzuprüfen:

(A) Die Verknüpfung ist assoziativ: Seien $f, g, h \in S_M$. Es ist zu zeigen, dass $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ ist. Um zu zeigen, dass zwei Funktionen mit gleichem Definitions- und Wertebreich (in diesem Falle beides M) gleich sind, muss man überprüfen, dass sie für alle $x \in M$ die gleichen Werte annehmen:

$$\begin{aligned}
(f \circ g) \circ h(x) &= (f \circ g)\Big(h(x)\Big) \\
&= f\Bigg(g\Big(h(x)\Big)\Bigg) \\
&= f\Bigg((g \circ h)(x)\Bigg) \\
&= f \circ (g \circ h)(x)
\end{aligned}$$

Also ist $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

(N) Das Neutralelement der Gruppe ist id_M, die identische Funktion auf M. Um dies einzusehen macht man sich zuerst einmal klar, dass $\mathrm{id}_M : M \to M : x \mapsto x$ wirklich bijektiv ist und somit überhaupt ein Element in S_M. Nun bleibt zu zeigen, dass für beliebige Elemente $f \in S_M$ gilt, dass $\mathrm{id}_M \circ f = f \circ \mathrm{id}_M = f$.

$$\begin{aligned}
(f \circ \mathrm{id}_M)(x) &= f\big(\mathrm{id}_M(x)\big) \\
&= f\big(x\big) \\
&= \mathrm{id}_M\Big(f\big(x\big)\Big) \\
&= (\mathrm{id}_M \circ f)\big(x\big).
\end{aligned}$$

(I) Es bleibt zu zeigen, dass jedes Element $f \in S_M$ ein Inverses hat, d.h. dass für jede bijektive Funktion f von M nach M eine Funktion f^{-1} existiert, sodass $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$ gilt. Dieses Inverse ist nun aber gerade die Umkehrfunktion von f (Definition I.3.7) und sie erfüllt nach Bemerkung I.3.10 genau die Bedingungen.

Also ist $(S_M, \circ)$ eine Gruppe.

(c) Sei $M := \{1, 2, 3\}$. Wir definieren die Funktionen f und g wie folgt:

$$\begin{aligned} f : M \to M \quad &: \quad 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3 \\ g : M \to M \quad &: \quad 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 2 \end{aligned}$$

Man verifiziert sofort, dass f, g bijektiv, d.h. wirklich Elemente in S_M sind. Um nun zu zeigen, dass $f \circ g \neq g \circ f$ gilt, reicht es, ein Element $x \in M$ zu finden mit $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$. Wir nehmen $x = 1$:

$$\begin{aligned} f \circ g(1) &= f\big(g(1)\big) = f\big(1\big) = 2 \\ g \circ f(1) &= g\big(f(1)\big) = g\big(2\big) = 3 \end{aligned}$$

Somit haben wir zwei Gruppenelemente gefunden, die nicht „kommutieren", somit ist das Axiom (K) aus Definition II.1.1 nicht erfüllt und die Gruppe nicht kommutativ (=abelsch).

Aufgabe H15 (Intervalle)

Sei K ein angeordneter Körper und $I, J \subseteq K$ seien Intervalle in K. Zeige: $I \cap J$ ist wieder ein Intervall in K.

Lösung: Wir möchten zeigen, dass $I \cap J$ ein Intervall ist. Dazu nehmen wir uns drei Körperelemente x, y, z und nehmen an, dass sie $x \leq y \leq z$ und $x, z \in I \cap J$ erfüllen. Wir müssen nun zeigen, dass auch y in $I \cap J$ liegt. Nun sind x und z aber Elemente in $I \cap J$ und das ist eine Teilmenge von I. Weil I aber ein Intervall ist, muss damit gelten, dass $y \in I$. Allerdings sind x und z nach dem gleichen Argument aber auch Elemente von J. Weil J aber ein Intervall ist, muss damit gelten, dass $y \in J$. Also haben wir gezeigt, dass $y \in I$ und $y \in J$. Somit gilt: $y \in I \cap J$.
Also ist $I \cap J$ ein Intervall.

Aufgabe H16 (ein endlicher Körper (Teil 2))

Wir betrachten noch einmal den zweielementigen Körper aus Aufgabe (G12).

(a) Lässt sich auf der abelschen Gruppe $(\mathbb{F}_2, +)$ noch eine andere Multiplikation $\bullet$ definieren, sodass $(\mathbb{F}_2, +, \bullet)$ ein Körper wird oder ist die in Aufgabe (G12) angegebene Multiplikation die einzige mögliche Wahl?

(b) Wieso ist es korrekt, zu sagen, dass $\mathbb{F}_2$ der kleinstmögliche Körper ist?

(c) Kann man den Körper $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ zu einem angeordneten Körper $(\mathbb{F}_2, +, \cdot, K_+)$ machen, d.h. lässt sich der Körper $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ anordnen?

Lösung:

(a) Sei $\bullet : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ eine Multiplikation, sodass $(\mathbb{F}_2, +, \bullet)$ ein Körper wird. In Bemerkung II.1.5 (7) im Skript wird bewiesen, dass in einem beliebigen Körper jedes Element mit Null multipliziert wieder Null ergibt. Daraus folgt also, dass

$$\mathbf{0} \bullet \mathbf{0} = \mathbf{0} \bullet \mathbf{1} = \mathbf{1} \bullet \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\mathbf{1} \bullet \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ist. Nach dem Axiom (E) aus der Definition eines Körpers hat der Körper $(\mathbb{F}_2, +, \bullet)$ ein multiplikatives Neutralelement(„Einselement"),

dass ungleich dem additiven Neutralelement(,,Nullelement”) ist. Da wir aber nur zwei Elemente in unserer Menge haben, nämlich $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ und $\mathbf{0}$ das Nullelement ist, muss das Element $\mathbf{1}$ das Einselement sein. Damit gilt wieder nach dem Axiom (E), dass $(\forall x \in \mathbb{F}_2) x \bullet \mathbf{1} = x$. Insbesondere gilt dies für $x = 1$ und wir erhalten: $\mathbf{1} \bullet \mathbf{1} = \mathbf{1}$.
Somit haben wir gezeigt, dass $\bullet$ und $\cdot$ immer die gleichen Werte annehmen und können daraus schließen, dass es nur eine einzige Multiplikation auf der abelschen Gruppe $(\mathbb{F}_2, +)$ gibt, die $\mathbb{F}_2$ zu einen Körper macht.

(b) Nach Axiom (N) aus der Definition einer abelschen Gruppe, enthält jeder Körper ein Nullelement, d.h. ein Körper muss immer mindestens ein Element besitzen. Nach Axiom (E) aus der Definition eines Körpers besitzt ein Körper zusätzlich immer ein Einselement, das ungleich dem Nullelement sein muss. Somit hat ein Körper immer mindestens zwei Elemente. Also gibt es keinen Körper, der weniger Elemente als $\mathbb{F}_2$ besitzt.

(c) Angenommen $\mathbb{F}_2$ wäre ein angeordneter Körper. Nach Satz II.2.4 gilt dann $\mathbf{1} > \mathbf{0}$. Nach Satz II.2.3 dürfen wir Ungleichungen addieren und sie bleiben wahr, also können wir die Ungleichung $(\mathbf{1} > \mathbf{0})$ auf sich selbst addieren und erhalten: $\mathbf{1}+\mathbf{1} > \mathbf{0}+\mathbf{0}$. Das lässt sich aber nach Definition unserer Addition vereinfachen zu $\mathbf{0} < \mathbf{0}$. Dies ist aber ein Widerspruch zu Satz II.2.3, der besagt, dass niemals $x < y$ und $x = y$ gleichzeitig erfüllt sein können. Also lässt sich $\mathbb{F}_2$ nicht anordnen.
Alternativer Beweis: Das additive Inverse zu $\mathbf{1}$ ist bekanntlich $\mathbf{1}$. Also: $-\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Nach Bemerkung II.2.5 ist in einem angeordneten Körper $x^2 \neq -\mathbf{1}$ für alle Körperelemente x. In $\mathbb{F}_2$ gilt aber offensichtlich, dass $\mathbf{1}^2 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} = -\mathbf{1}$. Also ist $\mathbb{F}_2$ kein angeordneter Körper, bzw. lässt sich nicht anordnen.