Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007
Übung 3, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 7 (Summen ungerader Zahlen).

Gegeben Zahlen $a_1, \dots, a_n$ schreibt man kurz $\sum_{k=1}^n a_k$ für ihre Summe $a_1 + \cdots + a_n$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) \;=\; n^2 \,.$$

Induktionsanfang $n = 1$: Es ist $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = (2 \cdot 1 - 1) = 1 = 1^2$.

Induktionschritt: Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ (Induktionsannahme) und haben zu zeigen, dass $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$ (Induktionsbehauptung). Nun ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}_{=n^2 \text{ per Ind.-Annahme}} + \underbrace{2(n+1)-1}_{\text{Summand zu } k=n+1} \\ &= n^2 + 2n + 1 \;=\; (n+1)^2 \,,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die 1. binomische Formel benutzt wurde.

G 8 (Vermutung und Induktion).

Finde für das Produkt

$$\Pi_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2})$$

einen möglichst einfachen Ausdruck und beweise dein Ergebnis mit vollständiger Induktion.

Wir zeigen: $\Pi_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$

Induktionsanfang $n = 2$:

$\Pi_{k=2}^{2}(1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$

Induktionsschritt:

Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $\Pi_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$ (Induktionsannahme). Wir haben zu zeigen, dass

$\Pi_{k=2}^{n+1}(1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+2}{2(n+1)}$ *(Induktionsbehauptung). Es ist*

$\Pi_{k=2}^{n+1}(1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}(1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{(n+1)^2-1}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}$ *wie benötigt.*

G 9 (Fibonacci-Zahlen).

Man zeige: Ist $a_0 = 0, a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, so ist

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n].$$

Es handelt sich um die Fibonacci-Zahlen, bei denen jede Zahl die Summe der beiden vorangehenden ist: $a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, ...$

Hinweis : Da die Definition von a_{n+2} zwei vorhergehende Glieder benutzt, muß im Induktionsanfang die Behauptung für zwei Startterme nachgewiesen werden.

Induktionsanfang $n = 0$ und $n = 1$: Es ist

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0] = 0.$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}] = 1.$$

Induktionschritt: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

und

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$$

(Induktionsbehauptung). Wir haben zu zeigen, dass

$$a_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}].$$

Es ist $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5})}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n] + \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2})]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}].$$

Dabei wurde benutzt $(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2})^2 = 1 + \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

G 10 (Wo steckt der Fehler?).

Wir behaupten voller Überzeugung: Alle Darmstädter Studierenden sind charmant. Und weil wir Mathematiker sind, wollen wir dies natürlich beweisen:
(IA) Wir stellen fest, dass es charmante Studierende gibt (man betrachte etwa die Menge der Übungsleiter dieser Vorlesung):
(IB) Wir nehmen an, dass jede Gruppe von n Studierenden, die mindestens einen charmanten Studierenden enthält, bereits ausschliesslich aus charmanten Studierenden besteht.
(IS) Nun betrachten wir eine beliebige Gruppe von $n+1$ Studierenden, die mindestens einen charmanten Studierenden enthält.c Wenn ein Studierender die Gruppe für einen kurzen Moment verlässt, dann sind alle anderen Studierenden charmant. (wegen der Induktionsbehauptung). Kommt der Studierende wieder zurück und ein anderer verlässt die Gruppe, so stellt sich heraus, dass der Studierende, der die Gruppe zuerst verlassen hat, ebenfalls charmant gewesen sein muss. Daher schließen wir, dass alle $n+1$ Studierenden charmant sind.
Dies beweist die Behauptung.

Der Fehler steckt im Induktionsschritt:
In einer Gruppe von zwei Studierenden kann man sich nicht sicher sein, dass wenn einer von beiden geht, der vebleibende charmant ist. Wenn der Beweis also funktionieren soll, wäre es notwendig die Induktion bei $n = 2$ zu beginnen, aber dies ist nicht möglich.

Hausübung

H 9 (Weitere Summenformeln).

Beweisen Sie die folgenden Formeln durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$.

(a) Induktionsanfang $n = 1$: Es ist $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Induktionsschritt: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ (Induktionsannahme). Wir haben zu zeigen, dass dann $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)$ (Induktionsbehauptung). Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1 \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)\,.
\end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung gezeigt.

(b) Induktionsanfang $n = 1$: Es gilt $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1^2}{4}(1+1)^2$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$ *(Induktionsannahme). Wir müssen zeigen, dass* $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2}{4}((n+1)+1)^2$ *(Induktionsbehauptung). Es ist*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2}{4}(n+1)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + \frac{13}{4}n^2 + 3n + 1 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}((n+1)+1)^2 .\end{aligned}$$

H 10 (Cauchy-Schwartz Ungleichung).

Es seien für $n \in \mathbb{N}$ zwei n-Tupel $(a_1, ..., a_n)$, $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{Q}^n$ gegeben. Zeige mittels vollständiger Induktion, dass für n-Tupel gilt:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2).$$

Induktionsanfang $n = 1$: Das steht sofort da.

Für $n = 2$ erhalten wir:

$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 = (a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2) = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq 0$, *also insbesondere*

$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2).$$

(Induktionsannahme). Wir müssen zeigen, dass

$$(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n+1} b_i^2).$$

(Induktionsbehauptung). Es ist

$$(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i)^2 = (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + a_{n+1}b_{n+1})^2$$

$$\leq (\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sqrt{a_{n+1}^2}\sqrt{b_{n+1}^2})^2.$$

Der letzte Ausdruck ist von der Form $(u_1v_1 + u_2v_2)^2$, so dass wir erneut die Induktionsbehauptung für $n = 2$ benutzen können. Wir erhalten somit die gewünschte Ungleichung

$$(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n+1} b_i^2).$$

H 11 (Varianten des Beweisprinzips der vollständigen Induktion).

Führen Sie die folgenden zwei Beweismethoden zurück auf das Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

(a) Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine gegebene Aussage für jede natürliche Zahl $n \geq n_0$. Zeigen Sie: Gilt $A(n_0)$ und folgt $A(n+1)$ aus $A(n)$ für alle $n \geq n_0$, so gilt $A(n)$ für jedes $n \geq n_0$.

(b) Nun sei $A(n)$ eine Aussage für $n \in \mathbb{N}$. Nehmen Sie an, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $A(1)$ gilt;

(ii) Gelten $A(1), \dots, A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so auch $A(n+1)$.

Zeigen Sie, dass dann $A(n)$ gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $B(n) = A(n_0 + (n-1))$. Aufgrund der Voraussetzungen an die $A(n)$'s gilt $B(1)$ und aus $B(n)$ folgt $B(n+1)$. Somit gilt $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per vollständiger Induktion. Folglich gilt $A(n)$ für alle $n \geq n_0$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $B(n)$ die Aussage: "Für alle $k \leq n$ gilt $A(k)$." Aufgrund der Voraussetzungen an die $A(n)$'s gilt $B(1)$ und aus $B(n)$ folgt $A(n+1)$ und somit $B(n+1)$ (weil ja $B(n+1) = B(n) \wedge A(n+1)$). Per vollständiger Induktion gilt $B(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit auch $A(n)$.

H 12 (Abzählproblem mit Binomialkoeffizienten).

Stelle dir ein rechteckiges umrandetes Gitter aus $n+1$ vertikalen Linien und $k+1$ horizontalen Linien vor (inklusive Ränder).

(a) Am linken unteren Gittereck sitzt eine Maus. Auf wie vielen Wegen kann die Maus zum Käse im rechten oberen Eck kommen, wenn sie nur entlang der Gitterlinien nach oben und nach rechts laufen kann?

Hinweis : Überlege dir zuerst, wie viele Schritte die Maus bis zum Käse braucht.

(b) Begründe unter Veranschaulichung der Binomialkoeffizienten als Wege im Gitter die folgende Rechenregel für natürliche Zahlen k, m mit $1 \leq k \leq m$:

$$\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k} = \binom{m}{k}$$

(a) Die Maus muss, unabhängig vom konkreten Weg, n Schritte nach rechts und k Schritte nach oben laufen. Von diesen $n+k$ Schritten kann sie k frei wählen, die sie nach oben läuft. Damit hat die Maus $\binom{n+k}{k}$ Möglichkeiten, zum Käse zu gelangen.

(b) Sei $m := n + k$. Dann kann man die Formel folgendermaßen interpretieren:

- $\binom{m-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{k-1}$ *ist die Anzahl der verschiedenen Wege bis zum Punkt A unterhalb des Käses.*
- $\binom{m-1}{k} = \binom{n+k-1}{k}$ *ist die Anzahl der verschiedenen Wege bis zum Punkt B links vom Käse.*