Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2007
25.4.2007

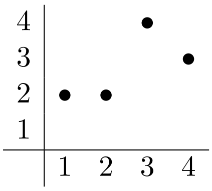
2. Übungsblatt zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

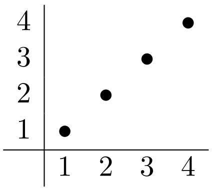
Aufgaben und Lösungen

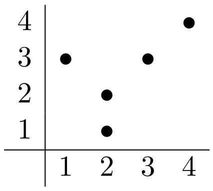
Gruppenübung

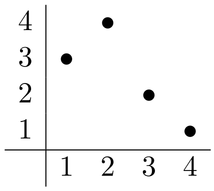
Aufgabe G4 (Graph von Funktionen)

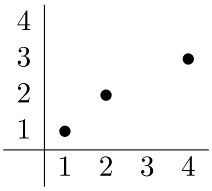
Sei $M := \{1, 2, 3, 4\}$. Welche der folgenden Teilmengen von $M \times M$ sind Graph einer Funktion von M nach M ? Überprüfe bei jeder Funktion, ob sie injektiv, surjektiv, bijektiv ist.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Lösung:

(a) ist eine Funktion, da jedem Element des Definitionsbereiches genau ein Element des Wertebereiches zugeordnet wird. Sie ist nicht injektiv, da 1 und 2 das gleiche Bild haben, nämlich 2. Sie ist nicht surjektiv, da die 1 nicht erreicht wird.

(b) ist eine Funktion, da jedem Element des Definitionsbereiches genau ein Element des Wertebereiches zugeordnet wird. Sie ist bijektiv, da jedes Element im Wertebereich genau einmal erreicht wird.

(c) ist keine Funktion, da der Zahl 2 zwei unterschiedliche Elemente im Wertebreich, nämlich 1 und 2 zugeordnet werden.

(d) ist eine Funktion, da jedem Element des Definitionsbereiches genau ein Element des Wertebereiches zugeordnet wird. Sie ist bijektiv, da jedes Element im Wertebereich genau einmal erreicht wird.

(e) ist keine Funktion, da der Zahl 3 kein Element im Wertebreich zugeordnet wird.

Aufgabe G5 (Injektivität und Surjektivität)

Welche der folgenden Funktionen sind injketiv, welche surjektiv, welche sind bijektiv? Im Falle einer bijektiven Funktion gib ihre Umkehrfunktion an.

- $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : k \mapsto k^2$
- $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : k \mapsto k^2$
- $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : k \mapsto 7 - k$
- $j : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} : k \mapsto 7 - k$
- $l : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} : k \mapsto (-1)^k$
- $t : \mathbb{N} \longrightarrow \{-1, 1\} : k \mapsto (-1)^k$
- $u : \{42, 23\} \longrightarrow \{-1, 1\} : k \mapsto (-1)^k$:
- $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : k \mapsto k + (-1)^k$

Lösung:

- Die Funktion f ist nicht injektiv, da z.B. $f(1) = f(-1)$ gilt. Sie ist auch nicht surjektiv, da z.B. 2 nicht im Bild von f liegt.
- Die Funktion g ist injektiv, da aus $x^2 = y^2$ immer folgt, dass $|x| = |y|$. Da aber x und y nicht negativ sind, folgt $x = y$. Die Funktion f ist aber immer noch nicht surjektiv, da 2 nach wie vor keine Quadratzahl ist, also nicht im Bild der Funktion liegt.
- Die Funktion h ist bijektiv, da sie eine Umkehrfunktion besitzt, ja sogar gleich ihrer eigenen Umkehrfunktion ist. $h \circ h(k) = h(7 - k) = 7 - (7 - k) = k$. Also gilt $h^{-1} = h$.
- Die Funktion j ist injektiv, da aus $7 - x = 7 - y$ immer folgt, dass $x = y$ ist. Sie ist aber nicht mehr surjektiv, da $f(x)$ nie größer als 7 wird. Sobmit kann unmöglich der ganze Wertebereich $\mathbb{Z}$ erreicht werden.
- Die Funktion l ist nicht injektiv, da z.B. gilt, dass $l(0) = l(2)$ ist. Sie ist auch nicht surjektiv, da z.B. die Zahl 2 nie erreicht wird, da die Funktion nur die beiden Werte -1 und 1 annimmt.
- Die Funktion t ist nicht injektiv, da z.B. gilt, dass $l(0) = l(2)$ ist. Sie ist aber surjektiv, da die beiden Elemente des Wertebereichs -1 und 1 erreicht werden ($f(0) = 1$ und $f(1) = -1$).
- Die Funktion u ist injektiv, da die beiden Elemente im Definitionsbreich auf unterschiedliche Elemente im Wertebreich abgebildet werden ($f(42) = 1 \neq f(23) = -1$). Die Funktion ist auch surjektiv, da die beiden Werte im Wertebreich auch beide angenommen werden. Folglich ist die Funktion bijektiv. Die Umkehrfunktion ist $u^{-1} : \{-1, 1\} \longrightarrow \{42, 23\} : \left\{ \begin{array}{cl} -1 & \mapsto 23 \\ 1 & \mapsto 42 \end{array} \right.$.
- Die Funktion φ ist bijektiv und gleich ihrer Umkehrfunktion.

Aufgabe G6 (Rechnen mit Mengen)

Es seien L, M, N Teilmengen der Menge X. Mache zunächst eine Skizze und zeige anschließend die folgenden Aussagen:

(a) $(M \cup N) \cap L = (M \cap L) \cup (N \cap L)$,

(b) $(M \cap N) \cup L = (M \cup L) \cap (N \cup L)$,

(c) $(M \subseteq N) \Leftrightarrow X \backslash N \subseteq X \backslash M$.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} x \in (M \cup N) \cap L &\Leftrightarrow (x \in M \text{ oder } x \in N) \text{ und } x \in L \\ &\Leftrightarrow (x \in M \text{ und } x \in L) \text{ oder } (x \in N \text{ und } x \in L) \\ &\Leftrightarrow x \in (M \cap L) \cup (N \cap L). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x \in (M \cap N) \cup L &\Leftrightarrow (x \in M \text{ und } x \in N) \text{ oder } x \in L \\ &\Leftrightarrow (x \in M \text{ oder } x \in L) \text{ und } (x \in N \text{ oder } x \in L) \\ &\Leftrightarrow x \in (M \cup L) \cap (N \cup L). \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (M \subseteq N) &\Leftrightarrow ((\forall x \in X) x \in M \Rightarrow x \in N) \\ &\Leftrightarrow ((\forall x \in X) x \notin N \Rightarrow x \notin M) \\ &\Leftrightarrow X \backslash N \subseteq X \backslash M \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H5 (injektiv & surjektiv)

Bezeichne S die Menge aller Studenten an der TU Darmstadt und D die Menge aller Daten eines Jahres.

(a) Sei $f : S \to D$ die Abbildung, die jedem Studenten aus der Menge S das Datum seines Geburtstages zuordnet.

Ist f injektiv, surjektiv oder bijektiv? Was ändert sich, wenn die Menge S durch die Menge aller an deinem Tisch sitzenden Studenten ersetzt wird?

(b) Sei M die Menge aller an der TU Darmstadt vergebenen Matrikelnummern und $g : S \to M$ die Abbildung, die jedem Studenten seine Matrikelnummer zuordnet.

Ist g injektiv, surjektiv oder bijektiv? Was ändert sich, wenn die Menge M durch die Menge der natürlichen Zahlen ersetzt wird?

Lösung:

(a) Da an der TU mehr als 365 Studenten studieren ein Jahr aber nur 365 Tage hat, müssen mindestens zwei Studenten am gleichen Tag Geburtstag haben, womit f *nicht injektiv* sein kann. Geht man davon aus, daß an jedem Tag mindestens ein TU-Student Geburtstag hat, dann ist f *surjektiv*. Weil f nicht injektiv ist, ist f auch *nicht bijektiv*.

Bezeichne $\tilde{S}$ die Menge der Studenten, die an deinem Tisch sitzen, und $\tilde{f} : \tilde{S} \to D$ die Funktion die jedem dieser Studenten das Datum seines Geburtstages zuordnet. Dann ist die Funktion $\tilde{f}$ höchstwahrscheinlich *injektiv*, weil alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben, und *nicht surjektiv*, da nicht an allen Tagen einer von ihnen Geburtstag hat. Folglich ist $\tilde{f}$ auch *nicht biijektiv*.

(b) Da jede Matrikelnummer nur einmal vergeben wird, haben alle Studenten verschiedene Matrikelnummern, woraus folgt, daß g *injektiv* ist. Da es zu jeder vergebenen Matrikelnummer auch einen zugehörigen Studenten gibt, ist g auch *surjektiv* und damit auch *bijektiv*.

Bezeichne $\tilde{g} : \tilde{S} \to \mathbb{N}$ die Funktion, die jedem Studenten seine Matrikelnummer zuordnet. Dann ist $\tilde{g}$ *nicht surjektiv*, da es zum Beispiel keinen Studenten mit der Matrikelnummer 1000000000 gibt. Folglich ist $\tilde{g}$ *nicht bijektiv*. Aus demselben Grund wie g ist auch $\tilde{g}$ *injektiv*.

Aufgabe H6 (Logik)

In der Vorlesung wurde die Injektivität einer Funktion $f \colon A \longrightarrow B$ definiert als

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A) f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

Wieso ist es ebenfalls möglich die Injektivität von f über

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A) x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$$

zu charakterisieren?

Lösung: Seien $x, y \in A$ gegeben. Wenn wir p definieren als die Aussage „$f(x) = f(y)$" und q definieren als „$x = y$", dann ist die Definition aus der Vorlesung gerade von der Form $p \Rightarrow q$ und die untere Definition ist die Kontraposition dazu $\neg q \Rightarrow \neg p$. Aus der Vorlesung wissen wir aber, dass für beliebige p und q stets

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg g \Rightarrow \neg p)$$

gilt, dass also eine Implikation immer zu ihrer Kontraposition äquivalent ist.

Aufgabe H7 (Verketten von Funktionen)
Gegeben seien die Funktionen $f: A \to B$ und $g: B \to C$. Zeigen Sie:

(a) Wenn f und g injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Wenn f und g surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(c) Wenn f und g bijektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(d) Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist auch g surjektiv.

(e) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch f injektiv.

Lösung:

(a) Seien $x, y \in A$ mit $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Es bleibt zu zeigen, dass $x = y$.
Per Definition von $\circ$ gilt, dass $g \circ f(x) = g(f(x))$ und $g \circ f(y) = g(f(y))$.
Somit ist $g\big(f(x)\big) = g\big(f(y)\big)$.
Nun nutzen wir aus, dass g injektiv ist, d.h. dass aus der Gleichheit der Bilder bereits die Gleichheit der Argumente folgt. Wir erhalten also: $f(x) = f(y)$.
Da aber f auch injektiv ist, folgt $x = y$, was zu beweisen war.

(b) Sei $c \in C$. Da die Funktion g surjektiv ist, existiert ein $b \in B$ mit $g(b) = c$. Nehmen wir dieses $b \in B$, so folgt aus der Surjektivität von f die Existenz eines $a \in A$ mit $f(a) = b$. Also haben wir gezeigt, dass für das beliebige $c \in C$ ein $a \in A$ existiert mit $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$, also ist $g \circ f$ surjektiv.

(c) Aus Kombination von (a) und (b) folgt sofort, dass $(g \circ f)$ bijektiv ist. Es bleibt zu zeigen, dass $(\forall c \in C)(g \circ f)^{-1}(c) = (f^{-1} \circ g^{-1})(c)$.
Sei $c \in C$. Dann gibt es ein $a \in A$ mit $(g \circ f)(a) = c$, also mit $(g \circ f)^{-1}(c) = a$.
Nun gilt aber auch, dass

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(c) = f^{-1}(g^{-1}(c)) = f^{-1}(g^{-1}(g(f(a))) = a,$$

was zu beweisen war.

(d) Sei $c \in C$. Da $g \circ f$ surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $g \circ f(a) = c$. Das heißt aber gerade, dass $g(f(a)) = c$ ist, d.h. wenn wir $b := f(a)$ setzen, haben wir ein Element $b \in B$ konstruiert mit $g(b) = c$. Also ist g surjektiv.

(e) Annahme, $f(x) = f(y)$ für Elemente $x, y \in A$. Dann wenden wir auf beiden Seiten die Funktion g an und erhalten die Gleichung $g(f(x)) = G(f(y))$, was aber gerade $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ ist. Von $g \circ f$ wissen wir aber, dass es surjektiv ist, somit gilt, dass $x = y$. Also haben wir die Injektivität von f bewiesen.

Aufgabe H8 (De Morgan für Mengen)

a) Sei X eine Menge, und $A, B \subseteq X$ Teilmengen von X. Beweisen Sie die folgenden Identitäeten:

$$X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B)$$

$$X \backslash (A \cap B) = (X \backslash A) \cup (X \backslash B)$$

Gilt dies auch für Mengen A und B, die keine Teilmengen von X sind?

b) Es sei X eine Menge und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen. Beweisen Sie, dass

$$X \setminus \Big(\bigcap_{i\in I} A_i \Big) = \bigcup_{i\in I} (X \setminus A_i)\,.$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
x \in (X\backslash A) \cap (X\backslash B) &\Leftrightarrow x \in X\backslash A \wedge x \in X\backslash B \\
&\Leftrightarrow (x \in X \wedge x \notin A) \wedge (x \in X \wedge x \notin B) \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin A \wedge x \notin B \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg(x \in A \vee x \in B) \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin (A \cup B) \\
&\Leftrightarrow x \in X\backslash(A \cup B)
\end{aligned}$$

b) $x \in X \setminus \big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \Leftrightarrow x \in X$ und $x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow x \in X$ und es existiert ein $i \in I$ mit $x \notin A_i$ $\Leftrightarrow$ es existiert ein $i \in I$ mit $x \in X \setminus A_i \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} (X \setminus A_i)$.