Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007
Übung 1, Lösungsskizze

Gruppenübung

G 1 (Negieren von Aussagen).

Formuliere das logische Gegenteil (die Negation) der folgenden Aussagen:

a) Alle Vögel sind blau.

b) Für jeden Bundesbürger gibt es einen Bundestagsabgeordneten, der sich für ihn zuständig fült.

c) Wer Sorgen hat, hat auch Likör. (Wilhelm Busch)

d) Wenn es regnet, wird die Straße nass.

e) Ich kam, sah und siegte.

f) Wenn es am Wochenende nicht regnet, fahre ich nach Hause oder besuche den Berliner Zoo.

---

a) Es gibt mindestens einen Vogel, der nicht blau ist.

b) Es gibt mindestens einen Bundesbürger, für den sich kein Bundestagsabgeordneter zuständig fült.

c) Es gibt jemanden, der Sorgen hat, aber keinen Likör.

d) Es regnet und die Straße wird nicht nass.

e) Ich kam nicht, sah nicht oder siegte nicht.

f) Am Wochenende regnet es nicht, und ich fahre weder nach Hause noch besuche ich den Berliner Zoo.

G 2 (Aussagen in Formelschreibweise.)

Übertrage die folgenden Aussagen in Formelschreibweise, und negiere sie anschließend:

a) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es zwei Primzahlen p und q, deren Produkt n teilt.

b) Jede natürlichen Zahl besitzt einen ungeraden Teiler, der ungleich 1 ist.

c) Es seien m und n natürlichen Zahlen. Wenn m größer oder gleich n und n größer oder gleich m ist, dann stimmen m und n überein.

---

a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists p \in \mathbb{N})(\exists q \in \mathbb{N})\, p \textit{ Primzahl} \wedge q \textit{ Primzahl} \wedge pq \textit{ teilt } n$

$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(\forall q \in \mathbb{N})\, \neg(p \textit{ Primzahl}) \vee \neg(q \textit{ Primzahl}) \vee \neg(pq \textit{ teilt } n)$

b) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})\, k \textit{ teilt } n \wedge ((\exists m \in \mathbb{N})\, k = 2m-1) \wedge \neg(k=1)$
$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})\, \neg(k \textit{ teilt} n) \vee ((\forall m \in \mathbb{N})\, \neg(k = 2m-1)) \vee\; k = 1$

c) $(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\, m \geq n \wedge n \geq m \Rightarrow m = n$
$(\exists m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})\, (m \geq n \wedge n \geq m) \wedge \neg(m = n)$

G 3 (Aussagenlogik.)

a) Beweise die Aussage

$$((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)) \Rightarrow q.$$

b) Diese Schlussweise wurde in der Vorlesung zum Beweis des folgenden Satzes verwendet:
Ist n eine durch 4 teilbare natürlichen Zahl, so ist $n+3$ keine Quadratzahl.
Für welche Aussagen standen dabei p und q?

c) Zeige: Ist n eine durch 3 teilbare natürlichen Zahl, so ist $n+2$ keine Quadratzahl. (Im Beweis des obigen Satzes wurde unterschieden, ob eine bestimmte Zahl gerade oder ugerade war. Diesmal ist es praktisch, zu unterscheiden, welchen Rest eine Zahl bei Division durch 3 lässt.)

---

a) *Wahrheitstafel oder Herleitung:*
$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee q \Leftrightarrow F \vee q \Leftrightarrow q$

b) $p = k$ *ist gerade.*
$q = n = k^2 - 3$ *ist nicht durch 4 teilbar.*

c) Indirekter Beweis:
Angenommen $n+2$ wäre eine Quadratzahl, also $n+2 = k^2$ mit $k \in \mathbb{N}$.

1. Fall: k ist durch 3 teilbar.
Es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $k = 3m$. Dann ist 3 Teiler von $k^2 = 9m^2$, also nicht von $n = 9m^2 - 2$.

2. Fall: k lässt bei Division durch 3 den Rest 1.
Es gibt $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $k = 3m+1$. Dann ist $n = k^2 - 2 = 9m^2 + 6m - 1$ nicht durch 3 teilbar, weil $9m^2 + 6m$ durch 3 teilbar ist.

3. Fall: k lässt bei Division durch 3 den Rest 2.
Es gibt $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $k = 3m+2$. Weil 3 die Zahl $9m^2 + 12m$ teilt, ist 3 kein Teiler von $n = k^2 - 2 = 9m^2 + 12m + 2$.

Wir haben also gezeigt: Wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n+2 = k^2$ gibt, dann ist n nicht durch 3 teibar. Nach dem Kontrapositionsprinzip ist das äquivalent zur ursprünglichen Behauptung: Wenn $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar ist, dann ist $n+2$ keine Quadratzahl.

Hausübung

H 1 (Aussagen in Formelschreibweise.)

Stelle die beiden folgenden Beweisprinzipien in Formelschreibweise dar, und beweise sie.

a) Zwei Aussagen sind genau dann äquivalent, wenn jede die andere zur Folge hat.

b) Wenn eine Aussage eine andere und diese eine dritte impliziert, so folgt die dritte Aussage aus der ersten.

---

a) $(p \Leftrightarrow q) \iff (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
Wahrheitstafel oder Herleitung:

$$(p \Leftrightarrow q) \overset{[\textbf{Def}]}{\iff} (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\overset{[\textbf{Distri}]}{\iff} (p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q)$$

$$\iff (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

b) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
Wahrheitstafel oder Herleitung:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

$$\overset{[\textbf{Def}]}{\iff} \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg p \vee r)$$

$$\overset{[\textbf{deMorgan}]}{\iff} (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg r)) \vee (\neg p \vee r)$$

$$\overset{[\textbf{Distri}]}{\iff} ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \vee ((q \wedge \neg r) \vee r)$$

$$\overset{[\textbf{Komm.,Ass.}]}{\iff} ((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee p)) \vee ((q \vee r) \wedge (\neg r \vee r))$$

$$\iff \neg q \vee p \vee q \vee r \iff W \vee p \vee r \iff W$$

H 2 (Aussagen als umgangssprachliche Sätze.)

Schreibe die folgenden Aussagen als umgangssprachliche Sätze und überlege dir, welche davon wahr sind. Begründe deine Antwort.

a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})\, n = k^2$

b) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})\, n^2 = k$

c) $(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\, n^2 = k$

d) $(\forall n \in \mathbb{N})((\exists k \in \mathbb{N})\, n^2 = 5k) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\, n = 5k$

---

a) Jede natürlichen Zahl hat eine natürlichen Quadratwurzel : falsch, z.B. 2.

b) Jede natürlichen Zahl hat eine natürliche Zahl als Quadrat : wahr.

c) Es gibt eine natürlichen Zahl, die das Quadrat jeder natürlichen Zahl ist : falsch, z.B. $1^2 \neq 2^2$.

d) Wenn dad Quadrat einer natürlichen Zahl durch fünf teilbar ist, dann ist sie selbst durch fünf teilbar : wahr (Primfaktorzerlegung)

H 3 (Studiengebühren).

Ein Politiker wird in einem Wahlkampf gefragt, ob er für oder gegen die Einführung von Studiengebühren ist. Da er sich um eine Antwort drücken will, sagt er: Ich habe mich stets gegen die Absicht gewandt, die Gegner der Bekämpfung der Antistudiengebührenbewegung zu unterdrücken. Ist der Mann für oder gegen die Einfürung von Studiengebühren?

Es liegen fünf Verneinungen vor: gegen die Absicht, Gegner, Bekämpfung, Anti..., unterdrücken. Durch wiederholte Anwendung der Regel $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ *ergibt sich* $\neg(\neg(\neg(\neg(\neg A)))) \Leftrightarrow \neg A$. *Also ist der Politiker gegen die Einführung von Studiengebühren.*

H 4 (Etwas Mengenlehre).

a) Betrachte die Mengen $A := \{♫, ☎, ↯\}$ und $B := \{♂, ♀\}$. Bestimme $B \times A$. Wieviel Elemente hat die Menge $B \times A \times \emptyset$?

b) Sei $M := \{1\}$. Bestimme die Mengen $\mathcal{P}(M)$ und $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$.

---

a) $B \times A = \{(♂, ♫),(♂, ☎),(♂, ↯),(♀, ♫),(♀, ☎),(♀, ↯)\}$.
Die Menge $B \times A \times \emptyset$ *hat 0, daher keine Elemente.*

b) $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}\}$
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(M)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$