Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
12.7.2007

13. Tutorium zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Aufgaben und Lösungen

Aufgabe T42 (komplexe Zahlenebene)
Zeichne die folgenden Zahlen in die komplexe Zahlenebene ein:

(a) $z_1 := e^{i\pi}$

(b) $z_2 := e^{i\cdot\frac{-\pi}{2}}$

(c) $z_3 := 4 \cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{6}}$

(d) $z_4 := 3 \cdot e^{i\cdot\frac{5}{8}\cdot 2\pi}$

(e) $z_5 := \sqrt{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$

(f) $z_6 := e^{i}$

(g) $z_7 := e^{-2}$

Hinweis zur (f): Der Winkel 1 im Bogenmaß entspricht $\left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ \approx 57.2957795^\circ$ im Gradmaß, da $1^\circ := \frac{2\pi}{360}$ ein 360tel des Vollkreises ist.

Lösung: Diese Lösung enthält nicht die geforderten Skizzen, ich gebe stattdessen aber an, wie weit der zu zeichnende Punkt vom Urpsrung entfernt ist (=Betrag der komplexen Zahl) und in welchem Winkel über der positiven x-Achse der Punkt zu suchen ist (=Winkel der Zahl)

(a) $e^{i\pi}$ hat Betrag 1 und Winkel $\pi = 180^\circ$,
die Zahl liegt also auf der negativen reellen Achse und hat Betrag 1, also ist $e^{i\pi} = -1$.

(b) $e^{i\cdot\frac{-\pi}{2}}$ hat ebenfalls Betrag 1 und den (negativen) Winkel $-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$ über der x-Achse, d.h. 270° über der x-Achse.
d.h. die Zahl ist der Schnittpunkt des Einheitskreises mit der negativen imaginären Achse, also ist $e^{i\cdot\frac{-\pi}{2}} = -i$.

(c) $4 \cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{6}}$ hat Betrag 4 und Winkel $\frac{2\pi}{6} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

(d) $3 \cdot e^{i\cdot\frac{5}{8}\cdot 2\pi}$ hat Betrag 3 und Winkel $\frac{5}{8} \cdot 2\pi = \frac{5}{8} \cdot 360^\circ = 225^\circ$.

(e) $\sqrt{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$ hat Betrag $\sqrt{2}$ und Winkel $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$.
Der Zahl entspricht also der Schnittpunkt der 1. Winkelhalbierenden mit dem Kreis um die 0 mit Radius $\sqrt{2}$. Die Skizze legt nahe, dass dies gerade die komplexe Zahl $1 + i$ ist.

(f) e^{i} hat Betrag 1 und Winkel 1, d.h. $1 = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ \approx 57.2957795^\circ$.
Die komplexe Zahl e^{i} liegt also auf dem Einheitskreis mit einem Winkel über der positiven reellen Achse von ungefähr(!) 60°.

(g) e^{-2} ist eine positive reelle Zahl und hat deshalb Betrag e^{-2} und Winkel $0 = 0°$. Die Zahl liegt also auf der positiven reellen Achse bei $e^{-2} \approx 0.135335283$.

Aufgabe T43 (Polarkoordinaten)

Aus Satz V.4.14 wissen wir, dass für jede komplexe Zahl $z \neq 0$ genau ein $t \in [0, 2\pi[$ – genannt der *Winkel* von z – existiert mit $z = |z|e^{it} = |z|(\cos t + i \sin t)$. Wir wollen zeigen, wie man diesen Winkel explizit ausrechnet, wenn eine komplexe Zahl in der Form $z = x + iy \neq 0$ gegeben ist.

(a) Einfachster Fall: Nimm an, $x = 0, y > 0$. Bestimme den Winkel t.

(b) Nächster Fall: Nimm an, $x = 0, y < 0$. Bestimme den Winkel t.

(c) Nimm nun an, $x > 0, y \geq 0$. Skizziere $z = x + iy$ in der Zahlenebene und finde den Winkel t mit Schulwissen, indem du ein geeignetes rechtwinkliges Dreieck untersuchst.

(d) Nimm nun an, $x > 0, y < 0$, und gehe ähnlich wie in Aufgabenteil (c) vor.

(e) Berechne t im Fall, der noch nicht untersucht wurde.

Lösung:

(a) Einfachster Fall: Nimm an, $x = 0, y > 0$.

Die Zahl hat Realteil 0 und einen positiven Imaginärteil. Also liegt sie auf der positiven imaginären Achse. Anschaulich hat sie somit einen Winkel von $t = 90° = \frac{\pi}{2}$ über der positiven reellen Achse.

Diese geometrische Überlegung lässt sich auch rechnerisch überprüfen: Für $t = \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\begin{aligned} |z|e^{it} &= |x+iy|e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= |0+iy|\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &= |iy|\,(1 + i \cdot 0) \\ &= |y| = y = z. \end{aligned}$$

Man beachte, dass wir ausgenutzt haben, dass $x = 0$ und dass $y > 0$ ist.

(b) Nächster Fall: Nimm an, $x = 0, y < 0$.

Die Zahl liegt diesmal auf der negativen imaginären Achse und hat anschaulich einen Winkel von 90° „nach unten", bzw. $270° = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi$.

Nachrechnen ergibt:

$$\begin{aligned} |z|e^{it} &= |x+iy|e^{i\frac{3}{2}\pi} \\ &= |0+iy|\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) \\ &= |iy|\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)\right) \\ &= |y|\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)\right) \\ &= (-y)\left(-\cos\frac{\pi}{2} - i \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &= (-y)\,(-1 - i \cdot 0) \\ &= -(-y) = y = z. \end{aligned}$$

(c) Nimm nun an, $x > 0, y \geq 0$.

Die Zahl liegt diesmal im 1. Quadranten. Die drei Zahlen

$$0, x = \mathrm{Re}(z), z = x + iy$$

bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel an der Ecke x. Die beiden Katheten haben die Länge $|x-0| = x$ und $|y-0| = y$, die Hypothenuse hat Länge $|z-0| = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Der gesuchte Winkel t ist der Winkel an der 0. Es gilt:

$$\tan(t) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{y}{x}$$

Der gesuchte Winkel t liegt auf jeden Fall im Intervall $]0, \frac{\pi}{2}[$ und auf diesem Intervall ist der Tangens umkehrbar (Bemerkung V.4.16) mit Umkehrfunktion arctan.
Wir erhalten also als Formel für den Winkel in diesem Fall:

$$t = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

(d) Nimm nun an, $x > 0, y < 0$.
Die Zahl liegt im sogenannten vierten Quadranten (also unten rechts). Die drei Zahlen

$$0, x = \text{Re}(z), z = x + iy$$

bilden wieder ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel an der Ecke x. Die Katheten haben diesmal die Länge $|x-0| = |x| = x$ und $|y-0| = |y| = -y$, die Hypothenuse hat wie oben die Länge $|z|$.
Der Winkel an der Ecke 0 ist diesmal nicht der gesuchte Winkel t, sondern gerade $2\pi - t$. Wir erhalten also

$$\tan(2\pi - t) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x}.$$

Der Winkel $2\pi - t$ ist zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und deshalb können wir wieder den Arcustangens verwenden:

$$2\pi - t = \arctan\left(-\frac{y}{x}\right)$$

Nach t aufgelöst ergibt dies:

$$t = 2\pi - \arctan\left(-\frac{y}{x}\right) = 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

(e) Der verbleibende Fall ist: $x < 0$:
Die Zahl $z = x + iy$ befindet sich links von der y-Achse, d.h. von der imaginären Achse. Das additive Inverse der Zahl, also $-z = -x - iy$ befindet sich rechts von der y-Achse, also in einem der bereits behandelten Fälle.
1. Fall: $y \leq 0$: Dann ist $-z = -x - iy$ oberhalb der x-Achse, d.h. $-z$ ist in Fall (c). Also ist der Winkel von $-z$ gleich

$$\arctan\left(\frac{-y}{-x}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dieser Winkel liegt zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Der Winkel der Zahl z ist also um $\pi = 180°$ größer, d.h.

$$t = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi.$$

2.Fall: $y > 0$: Dann ist $-z = -x - iy$ unterhalb der x-Achse, also in Fall (d): Der Winkel von $-z$ ist also:

$$2\pi + \arctan\left(\frac{-y}{-x}\right) = 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Dieser Winkel liegt zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π. Die gegenüberliegende Zahl z hat also als Winkel $\pi = 180°$ weniger, folglich ist

$$t = 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi.$$

Wir sehen also: In beiden Fällen erhalten wir als Formel:

$$t = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi.$$

Aufgabe T44 (Surjektivität der komplexen Exponentialfunktion)
Zeige, dass $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ surjektiv ist. Verwende dazu Satz V.4.14 und die Bijektivität der reellen Exponentialfunktion $\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$.

Lösung: Sei $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Wir wollen zeigen, dass ein $w \in \mathbb{C}$ existiert mit $e^w = z$. Nach Satz V.4.14 lässt sich jede Zahl $z \neq 0$ schreiben als

$$z = |z| \cdot e^{it}$$

mit einer reellen Zahl $t \in [0, 2\pi[$. Der Betrag $|z|$ ist nicht gleich 0, weil $z \neq 0$. Also ist $|z| > 0$. Von jeder reellen Zahl größer Null lässt sich nun aber der natürliche Logarithmus bilden und wir können $|z|$ schreiben als $|z| = e^{\log(|z|}$. Somit erhalten wir:

$$z = |z| \cdot e^{it} = e^{\log(|z|)}e^{it} = e^{\log(|z|)+it}.$$

Das heißt: Wenn wir $w := \log(|z|) + it$ setzen, dann haben wir gezeigt, dass $z = e^w$.
Dies geht für jedes $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Folglich ist $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ surjektiv.

Aufgabe T45 (Nicht-Injektivität der komplexen Exponentialfunktion)
Wir wollen untersuchen, wie nicht-injektiv die komplexe Exponentialfunktion ist. Nimm an, zwei Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ haben das gleiche Bild $e^z = e^w$. Was lässt sich dann über die Differenz $z - w$ der beiden Zahlen z und w sagen? Hinweis: Folgerung V.4.13.
(Nebenbei: Wie müsste eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$ aussehen, sodass $\exp|_M : M \longrightarrow \mathbb{C}$ injektiv ist?)

Lösung:

$$\begin{aligned}
& e^z = e^w \\
\iff \quad & e^z \cdot e^{-w} = 1 \\
\iff \quad & e^{z-w} = 1 \\
\overset{\text{(Folgerung V.4.13)}}{\iff} \quad & z - w \in 2\pi i\mathbb{Z} \\
\iff \quad & (\exists k \in \mathbb{Z}) z - w = 2\pi i k
\end{aligned}$$

Die exp-Funktion wird injektiv, wenn man sie z.B. auf der Menge $M := \{s + it : s \in \mathbb{R} : t \in [0, 2\pi[$ definiert.

Aufgabe T46 (Gleichungen in $\mathbb{C}$)
Finde alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen, in dem sie auf die Folgerungen V.4.13 und V.4.15 zurückführst:

(a) $e^z = e^{i\pi}$

(b) $z^8 = 2^8$

(c) $z^5 = 3$

(d) $e^z = -12$

(e) $z^4 = -1$

(f) $z^4 = 3 \cdot e^{2\pi i \frac{3}{5}}$

(g) $e^z = 3 \cdot e^{2\pi i \frac{3}{5}}$

Die Lösungen darfst du entweder in der Form $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ oder in der Polarform re^{it} mit $r > 0, t \in \mathbb{R}$ angeben.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} e^z &= e^{i\pi} \\ e^{z-i\pi} &= 1 \\ (\exists k \in \mathbb{Z}) z - i\pi &= 2\pi i k \\ (\exists k \in \mathbb{Z}) z &= 2\pi i k + i\pi = (2k+1)\pi \cdot i. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind alle Zahlen der Form $(2k+1)\pi \cdot i$ für $k \in \mathbb{Z}$. Es gibt also unendlich viele Lösungen.

(b)

$$\begin{aligned} z^8 &= 2^8 \\ \frac{z^8}{2^8} &= 1 \\ \left(\frac{z}{2}\right)^8 &= 1 \\ (\exists k \in \{0, \dots, 7\}) \frac{z}{2} &= e^{\frac{k}{8} 2\pi i} \\ (\exists k \in \{0, \dots, 7\}) z &= 2 \cdot e^{\frac{k}{8} 2\pi i} \end{aligned}$$

Die Lösungen sind alle Zahlen der Form $2 \cdot e^{\frac{k}{8} 2\pi i}$ für $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Es gibt also genau 8 unterschiedliche Lösungen.

(c) Die Gleichung $z^5 = 3$ besitzt eine Lösung, die man sofort sieht: $\sqrt[5]{3}$. Wir können also $3 = \left(\sqrt[5]{3}\right)^5$ schreiben:

$$\begin{aligned} z^5 &= 3 \\ z^5 &= \left(\sqrt[5]{3}\right)^5 \\ \left(\frac{z}{\sqrt[5]{3}}\right)^5 &= 1 \\ (\exists k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}) \frac{z}{\sqrt[5]{3}} &= e^{\frac{k}{5} 2\pi i} \\ (\exists k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}) z &= \sqrt[5]{3} \cdot e^{\frac{k}{5} 2\pi i} \end{aligned}$$

Die Lösungen sind alle Zahlen der Form $\sqrt[5]{3} \cdot e^{\frac{k}{5} 2\pi i}$ für $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Es gibt also genau 5 unterschiedliche Lösungen.

(d)

$$\begin{aligned}
e^z &= -12 \\
e^z &= 12 \cdot e^{i\pi} \\
e^z &= e^{\log 12} \cdot e^{i\pi} \\
e^z &= e^{\log 12 + i\pi} \\
e^{z - i\pi - \log 12} &= 1 \\
(\exists k \in \mathbb{Z}) z - i\pi - \log 12 &= 2\pi i k \\
(\exists k \in \mathbb{Z}) z &= \log 12 + 2\pi i k + i\pi = \log 12 + (2k+1)\pi \cdot i.
\end{aligned}$$

Die Lösungen sind alle Zahlen der Form $\log 12 + (2k+1)\pi \cdot i$ für $k \in \mathbb{Z}$. Es gibt also unendlich viele Lösungen.

(e)

$$\begin{aligned}
z^4 &= -1 \\
z^4 &= e^{i\pi} \\
z^4 &= \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^4 \\
\left(z \frac{z}{e^{\frac{i\pi}{4}}}\right)^4 &= 1 \\
(\exists k \in \{0,1,2,3\} \frac{z}{e^{\frac{i\pi}{4}}} &= e^{\frac{k}{4} 2\pi i} \\
(\exists k \in \{0,1,2,3\} z &= e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot e^{\frac{k}{4} 2\pi i} \\
(\exists k \in \{0,1,2,3\} z &= e^{\frac{2k+1}{4} 2\pi i}
\end{aligned}$$

Die Lösungen sind alle Zahlen der Form $e^{\frac{2k+1}{4} 2\pi i}$ für $k \in \{0,1,2,3\}$. Es gibt also genau 4 unterschiedliche Lösungen.

(f) Die Rechnung geht analog wie oben. Ergebnis: $z = \sqrt[4]{3} \cdot e^{\frac{3k}{20} 2\pi i}$ für $k \in \{0,1,2,3\}$.

(g) Die Rechnung geht analog wie oben. Ergebnis: $z = \log(3) + i\left(\frac{3}{5} 2\pi + k \cdot 2\pi\right) = \log(3) + i \cdot 2\pi \left(\frac{3}{5} + k\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe T47 (noch eine Aufgabe)

Wir wissen, dass für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein eindeutiges $t \in [0, 2\pi[$ existiert mit $z = |z| \cdot e^{it}$, dies erlaubt uns, eine Funktion zu definieren, die jeder komplexen Zahl ungleich 0 eben dieses $t \in [0, 2\pi[$ zuweist:

$$\begin{aligned}
\measuredangle \ : \mathbb{C}\backslash\{0\} &\longrightarrow [0, 2\pi[\\
z = |z| \cdot e^{it} &\mapsto t \qquad \text{für } t \in [0, 2\pi[
\end{aligned}$$

Zeige, dass die Funktion $\measuredangle : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to [0, 2\pi[$ *nicht* stetig ist. (Z.B. mit dem Folgenkriterium)

Lösung: Die Folge $\left(2\pi - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}$ gegen 2π. Multiplizieren mit i liefert die Folge $\left(i(2\pi - \frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$, die dann in $\mathbb{C}$ gegen $i \cdot 2\pi$ konvergiert. Die komplexe Exponentialfunktion ist überall stetig, insbesondere an der Stelle $i \cdot 2\pi$. Folglich konvergiert die Folge $\left(e^{i(2\pi - \frac{1}{n})}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $e^{i \cdot 2\pi} = 1$.

Diese Folge nennen wir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(e^{i(2\pi - \frac{1}{n})}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wenn die Winkelfunktion $\measuredangle : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow [0, 2\pi[$ stetig wäre, dann müsste ja $(\measuredangle(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0, 2\pi[$ gegen $\measuredangle(1)$ konvergieren.
Weil aber $2\pi - \frac{1}{n}$ immer im Intervall $[0, 2\pi[$ liegt, ist folglich $\measuredangle(z_n) = \measuredangle\left(e^{i(2\pi - \frac{1}{n})}\right) = 2\pi - \frac{1}{n}$. Dies konvergiert aber gegen 2π und dies ist nicht mehr im Intervall $[0, 2\pi[$. Insbesondere konvergiert dies nicht gegen $\measuredangle(1) = \measuredangle(e^{i\cdot 0}) = 0$.
Also ist die Winkelfunktion nicht stetig an der Stelle 1 und somit nicht stetig.