Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007
Tutorium 12, Lösungsskizze

Konvexe Funktionen und Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in I$ und alle $t \in [0,1]$ die folgende Ungleichung gilt:

$$f(tx + (1-t)y) \;\le\; tf(x) + (1-t)f(y)\,.$$

Aufgaben

T 37 Mache dir klar, was diese Definition für den Graphen von f bedeutet.

[Halte x und y fest und fasse beide Seiten der Ungleichung als Funktionen von t auf.]

Läuft t durch das Intervall $[0,1]$, läuft $x_t := tx + (1-t)y$ von y nach x. Die linke Seite der zu untersuchenden Ungleichung ist der Funktionswert von f an der Stelle x_t, die rechte Seite ist der Wert der Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad z \mapsto f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \cdot (z - x)$$

an der Stelle x_t, deren Graph die Sekante durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ ist (Details sofort!) Die Bedingung bedeutet also, dass zwischen x und y der Graph von f unterhalb (im Sinne von $\le$) der Sekanten verläuft. Details: Es ist

$$\begin{aligned} g(x_t) &= f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \cdot (x_t - x) \;=\; f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \cdot (1-t)(y - x) \\ &= f(x) + (f(y) - f(x)) \cdot (1-t) \;=\; tf(x) + (1-t)f(y)\,. \end{aligned}$$

T 38 Zeige, dass die beiden Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto |x|$$

und

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x^2$$

konvex sind.

Gegeben $x, y \in \mathbb{R}$ und $t \in [0,1]$ ist

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= |tx + (1-t)y| \;\le\; |tx| + |(1-t)y| \\ &= t|x| + (1-t)|y| \;=\; tf(x) + (1-t)f(y)\,. \end{aligned}$$

Also ist f konvex. Weiter ist

$$\begin{aligned} g(tx + (1-t)y) &= (tx + (1-t)y)^2 \;=\; t^2x^2 + 2t(1-t)xy + (1-t)^2y^2 \\ &= t^2(x^2 + y^2 - 2xy) + t(2xy - 2y^2) + y^2\,, \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} g(tx+(1-t)y) - (\underbrace{tg(x)+(1-t)g(y)}_{tx^2+(1-t)y^2}) &= t^2(x^2+y^2-2xy)+t(2xy-y^2-x^2) \\ &= (t^2-t)(x-y)^2 \le 0\,, \end{aligned}$$

also wie benötigt $g(tx+(1-t)y) \le tg(x)+(1-t)g(y)$.

T 39 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in I$.

Gehe hierzu folgendermaßen vor:

i) Sei zunächst vorausgesetzt, dass $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in I$.

   a) Zeige, dass die Ableitung $f' : I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend ist.

   b) Seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ und $0 < t < 1$. Setze $x := tx_1 + (1-t)x_2$. Dann gilt $x_1 < x < x_2$ sowie

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

   c) Mache dir klar, dass $x - x_1 = (1-t)(x_2-x_1)$ und $x_2 - x = t(x_2-x_1)$ Folgere, dass

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{1-t} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{t}$$

   und weiter

$$f(x) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

   Die Funktion f ist also konvex.

ii) Sei andererseits $f : I \to \mathbb{R}$ konvex.

a) Angenommen, es gelte nicht $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Dann gibt es ein $x_0 \in I$ mit $f''(x_0) < 0$. Sei $c := f'(x_0)$ und

$$\varphi(x) := f(x) - c(x - x_0) \text{ für } x \in I.$$

Zeige: $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ist eine zweimal differenzierbare Funktion mit $\varphi'(x_0) = 0$ und $\varphi''(x_0) = f''(x_0) < 0$. Folgere weiterhin, dass φ in x_0 ein isoliertes lokales Maximum besitzt.

b) Nach Teilaufgabe a) existiert ein $h > 0$, so dass $]x_0 - h, x_0 + h[\subseteq I$ und

$$\varphi(x_0 - h) < \varphi(x_0), \quad \varphi(x_0 + h) < \varphi(x_0).$$

Folgere hieraus, dass

$$f(x_0) > \frac{1}{2}(f(x_0 - h) + f(x_0 + h)).$$

c) Setze $x_1 := x_0 - h, x_2 := x_0 + h$ und $t := \frac{1}{2}$. Dann gilt $x_0 = tx_1 + (1 - t)x_2$. Folgere hieraus einen Widerspruch zur Konvexität von f.

---

i) a) Dies ist Folgerung V.2.3(3) aus der Vorlesung.

b) Die Behauptung $x_1 < x < x_2$ ist klar. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existieren $\xi_1 \in]x_1, x[$ und $\xi_2 \in]x, x_2[$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

(Monotonie der Ableitung!)

c) Dies ist simples nachrechnen und einsetzen.

ii) a) $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ist eine zweimal differenzierbare Funktion, da f zweimal differenzierbar ist. Die zweite Behauptung folgt aus Satz V.2.9.

b) $f(x_0) = \varphi(x_0) > \frac{1}{2}(\varphi(x_0 - h) + \varphi(x_0 + h)) = \frac{1}{2}(f(x_0 - h) + f(x_0 + h))$.

c) Dies folgt durch simples einsetzen der oben genannten Größen.

T 40 Wir nennen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ *konkav*, wenn $-f$ konvex ist. Mache dir wie in **T37** klar, was diese Definition für den Graphen von f bedeutet.

Die Bedingung bedeutet, dass zwischen x und y der Graph von f oberhalb (im Sinne von $\geq$) der Sekanten verläuft.

T 41 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Wir sagen, f habe in $x_0 \in I$ einen *Wendepunkt*, wenn es Intervalle $]a, x_0[$ und $]x_0, b[$ gibt so, dass eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$f \text{ ist in }]a, x_0[\text{ konvex und in }]x_0, b[\text{ konkav;}$$

$$f \text{ ist in }]a, x_0[\text{ konkav und in }]x_0, b[\text{ konvex.}$$

Welchen Vorteil hat diese Definition gegenüber der gewöhnlichen Definiton eines Wendepunkts, die man in der Schule lernt? Gib ein Beispiel einer Funktion an, die einen Wendepunkt besitzt, aber nicht differenzierbar ist.

Zum Beispiel hat die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto := \begin{cases} \sqrt{x} & \textit{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{x} & \textit{für } x < 0 \end{cases}$$

in 0 *einen Wendepunkt, ist dort aber nicht differenzierbar.*